

Algoritmi e Strutture Dati

Schifano S. Fabio `schifano@fe.infn.it`

Esercizio: Torre di Hanoi

Siano dati 3 pioli verticali, numerari da 0 a 2, ed un numero n di dischi di dimensioni decrescenti.

All'inizio del gioco i dischi sono tutti impilati in ordine di grandezza decrescente, dal basso verso l'alto, sul primo piolo.

L'obiettivo del gioco é quello di spostare tutti i dischi dal piolo 0 al piolo 1 rispettando le seguenti regole:

1. é possibile spostare un solo disco alla volta
2. un disco non può essere impilato su un altro disco di dimensioni più piccole

Il piolo 2 é usato come piolo di supporto durante i trasferimenti.

Il seguente algoritmo risolve il problema osservando che, l'unico modo per spostare il disco più grande dal piolo 0 al piolo 1 consiste nello spostare prima tutti gli altri dischi sul piolo 2. Quindi:

1. **sposta** i primi $n - 1$ dischi dal piolo 0 al piolo 2, rispettando la **legge**
2. **sposta** l'ultimo disco dal piolo 0 al piolo 1
3. **sposta** i primi $n - 1$ dischi dal piolo 2 al piolo 1

I punti 1 e 3 implicano la risoluzione del problema di dimensione $n - 1$ con una permutazione dei nomi dei pioli (al secondo passo il piolo 0 diviene il piolo di supporto).

Utilizzando il tipo di dato pila per definire un piolo, la procedura specifica in precedenza per la risoluzione del problema può essere così codificata:

```
void torredihanoi ( int n, piolo origine, piolo destinazione, piolo intermedio ) {  
  
    if ( n == 1 ) {  
  
        /* muovi il disco dalla piolo origine alla piolo destinazione */  
        muovidisco(origine, destinazione);  
  
    } else {  
        torredihanoi (n - 1, origine, intermedio, destinazione);  
  
        muovidisco(origine, destinazione);  
  
        torredihanoi(n - 1, intermedio, destinazione, origine);  
    }  
}
```

La procedure **muovidisco** deve:

1. leggere l'elemento di testa dal piolo **origine** (LEGGIPILA) e scriverlo in testa al piolo **destinazione** (SCRIVIPILA)
2. cancellare l'elemento di testa del piolo **origine** (CANCPILA)

La relazione di ricorrenza che dá il numero di spostamenti effettuati dalla procedura **torredihanoi** in funzione del numero dei dischi é la seguente:

$$C(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2 \cdot C(n - 1) + 1 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Sostituendo manualmente si ha:

$$\begin{aligned} C(n) &= \\ &= 2C(n - 1) + 1 \\ &= 2(2C(n - 2) + 1) + 1 = 2^2 \cdot C(n - 2) + 2 + 1 \\ &= 4(2C(n - 3) + 1) + 2 + 1 = 2^3 \cdot C(n - 3) + 4 + 2 + 1 \\ &= 8(2C(n - 4) + 1) + 4 + 2 + 1 = 2^4 \cdot C(n - 4) + 8 + 4 + 2 + 1 \\ &\vdots \\ &= 2^{n-1} \cdot C(n - (n - 1)) + 2^{n-2} + \dots 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \\ &= 2^{n-1} \cdot C(1) + 2^{n-2} + \dots 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} 2^i \\ &= 1 + 2 \frac{1-2^{n-1}}{1-2} = 2^n - 1 \end{aligned}$$

Il numero di spostamenti necessari per risolvere il gioco é **esponenziale** !

