

# Ordini di grandezza e notazione asintotica

Nella maggior parte dei casi non e' necessario determinare il tempo esatto di esecuzione di un algoritmo. Cio' che ne determina l'efficienza e':

## Comportamento asintotico

Velocita' con cui cresce il tempo di esecuzione di un algoritmo al crescere della dimensione dell'input, nel limite in cui la dimensione dell'input diventa sufficientemente grande.

Algoritmi asintoticamente piu' efficienti costituiscono, in genere, la scelta migliore per qualsiasi input, eccetto che per input di dimensione molto piccola.

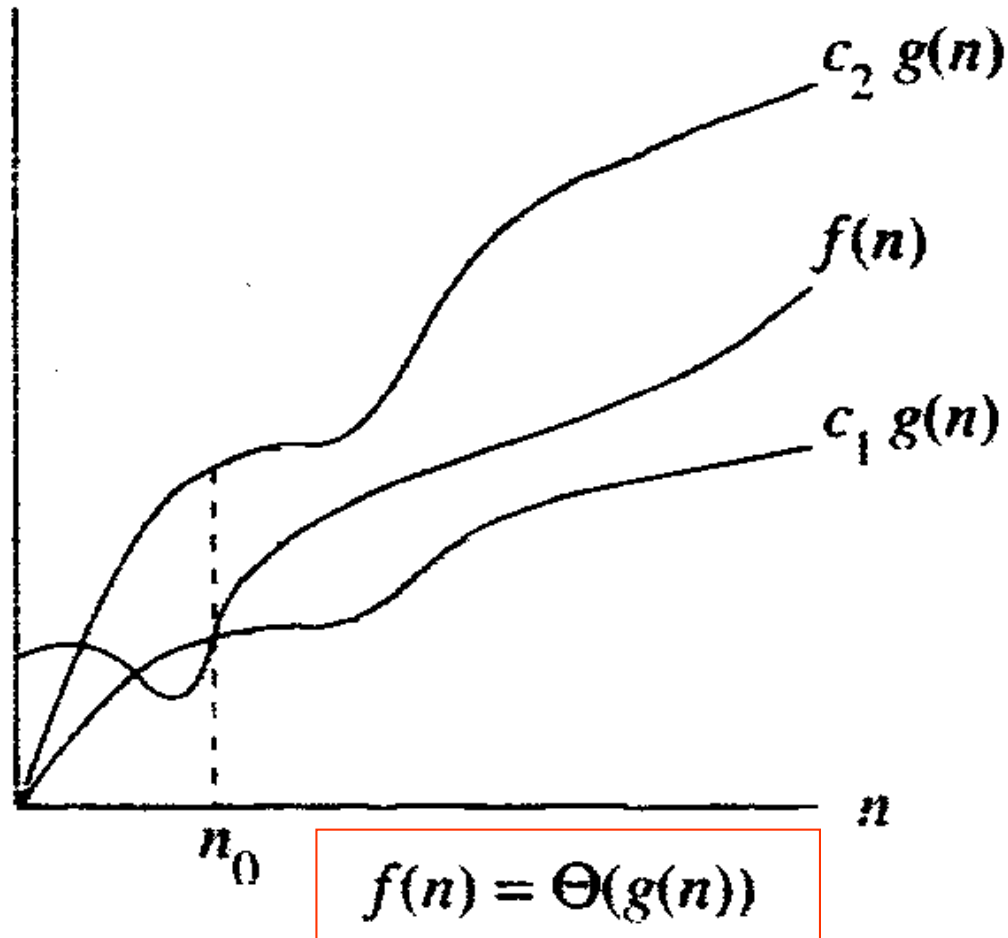
In particolare:

L' **ordine di grandezza** del tempo di esecuzione di un algoritmo fornisce un modo semplice per quantificare la sua efficienza e per confrontare le prestazioni di diversi algoritmi.

## Notazione $\Theta$

Data una funzione  $g(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , si denota con  $\Theta(g(n))$  l'insieme delle funzioni  $f(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \exists c_1, c_2, n_0 \text{ positive tali che} \\ \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$$



$g(n) \rightarrow$  Limite asintotico stretto per  $f(n)$

## Esempio:

Per l' insertion sort,  $T(n) = \Theta(n^2)$  (nel caso peggiore). Infatti:

$$T(n) = an^2 + bn + c \quad a, b, c > 0$$

$$\begin{aligned} T(n) = \Theta(n^2) &\Leftrightarrow \exists c_1, c_2, n_0 : \forall n \geq n_0 \\ &\quad c_1 n^2 \leq an^2 + bn + c \leq c_2 n^2 \\ &\Leftrightarrow c_1 \leq a + (b/n) + (c/n^2) \leq c_2 \end{aligned}$$

$$n_0 = 1, \quad c_1 = a, \quad c_2 = a+b+c$$

## Notiamo:

Se  $T(n) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_0$  e' un polinomio di grado  $m$  (con  $a_m > 0$ ), allora  $T(n) = \Theta(n^m)$

Infatti:

$$\begin{aligned} T(n) / n^m &= a_m + a_{m-1} n^{-1} + \dots + a_0 n^{-m} \quad \rightarrow \\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad &a_m - |a_{m-1}| n^{-1} - \dots - |a_0| n^{-m} > 0 \end{aligned}$$

Se scegliamo:

$$\begin{aligned} c_1 &= a_m - |a_{m-1}| n_0^{-1} - \dots - |a_0| n_0^{-m} \\ c_2 &= a_m + |a_{m-1}| + \dots + |a_0| \\ \forall n \geq n_0 \quad &c_1 n^m \leq T(n) \leq c_2 n^m \end{aligned}$$

## Una considerazione ...

- Considereremo sempre funzioni  $f(n)$  e  $g(n)$  asintoticamente positive.

### Relazione con il concetto di limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0 \quad \Rightarrow \quad f(n) = \Theta(g(n))$$

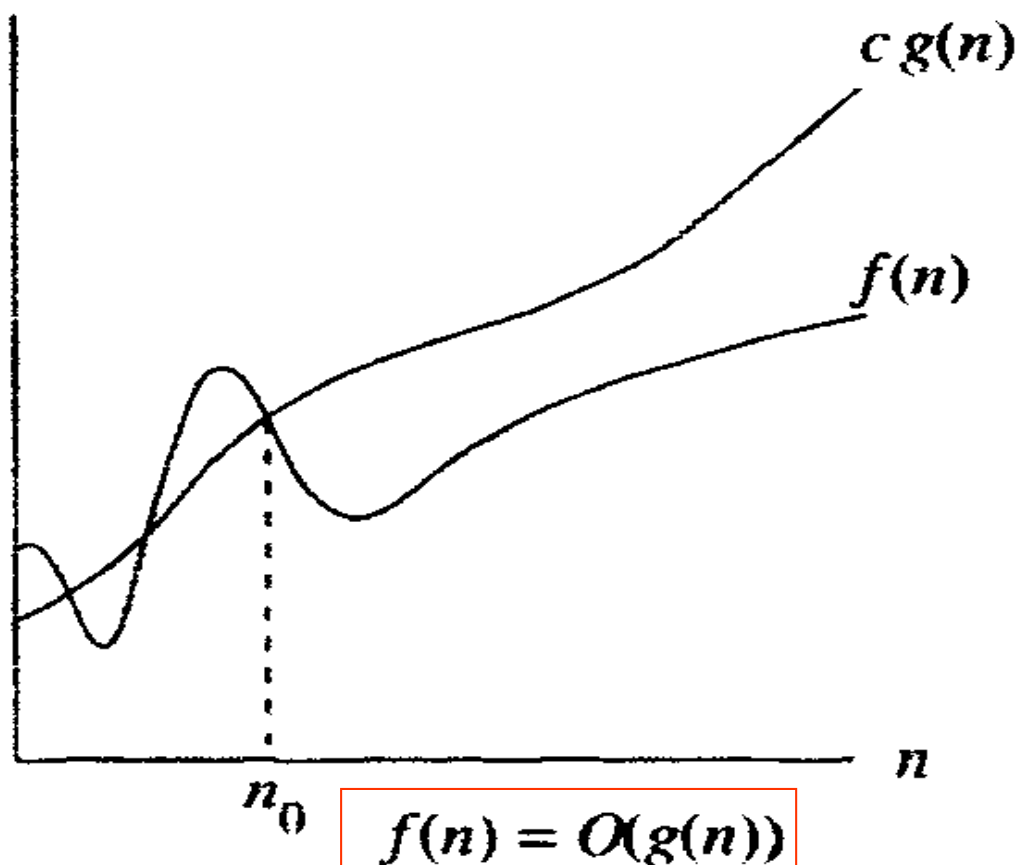
$$f(n) = \Theta(g(n)) \quad \not\Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq \infty \end{array} \right. \quad (\text{se esiste})$$

## Notazione O

Data una funzione  $g(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , si denota con  $O(g(n))$  l'insieme delle funzioni  $f(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$O(g(n)) = \{f(n) : \exists c, n_0 \text{ positive tali che} \\ \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq f(n) \leq c g(n)\}$$



$g(n) \rightarrow$  Limite asintotico superiore per  $f(n)$

Notare:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$$

$$f(n) = O(g(n)) \not\Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$$

Inoltre:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f(n) = O(g(n))$$

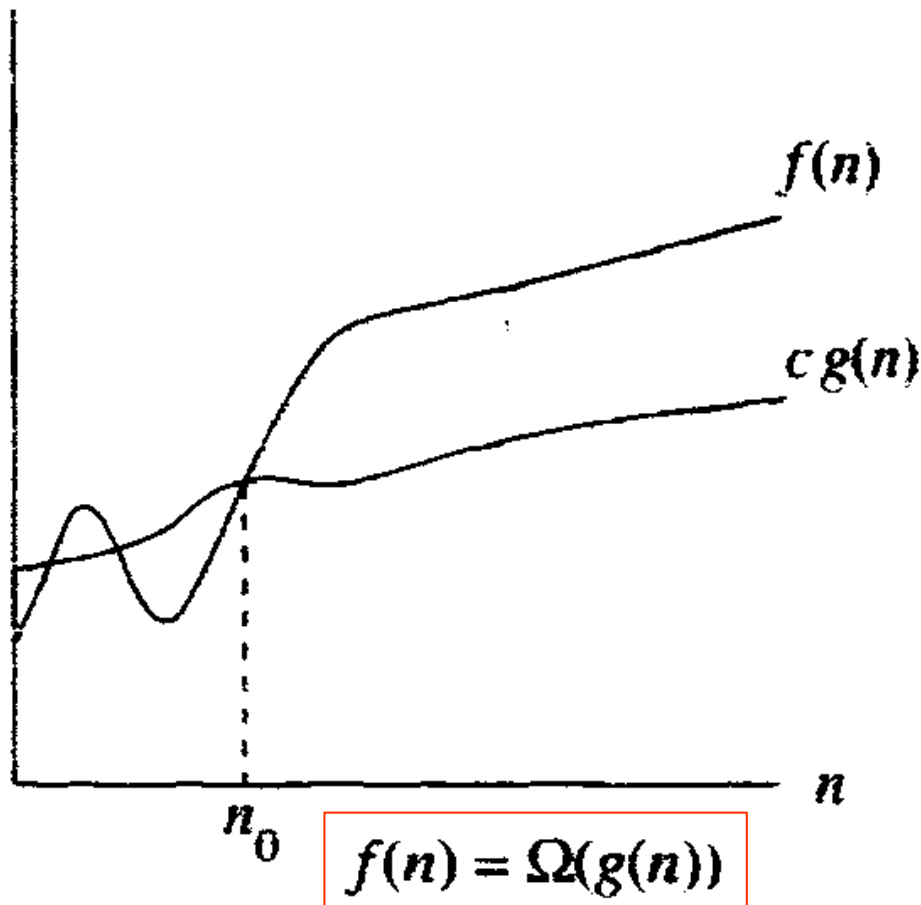
$$f(n) = O(g(n)) \not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$$f(n) = O(g(n)) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \text{ (se esiste) } < \infty$$

## Notazione $\Omega$

Data una funzione  $g(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , si denota con  $\Omega(g(n))$  l'insieme delle funzioni  $f(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \exists c, n_0 \text{ positive tali che} \\ \forall n \geq n_0 \quad 0 < c g(n) \leq f(n)\}$$



$g(n) \rightarrow$  limite asintotico inferiore per  $f(n)$

Notare:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \not\Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = \Omega(g(n)) \text{ e } f(n) = O(g(n))$$

Inoltre:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \text{ (se esiste) } > 0$$



## Notazione o

Data una funzione  $g(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , si denota con  $o(g(n))$  l'insieme delle funzioni  $f(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$o(g(n)) = \{f(n) : \forall c > 0, \exists n_0 \text{ tale che} \\ \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq f(n) \leq c g(n)\}$$

Notare:

$$o(g(n)) \subset O(g(n))$$

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

## Notazione $\omega$

Data una funzione  $g(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , si denota con  $\omega(g(n))$  l'insieme delle funzioni  $f(n)$ :

$$\omega(g(n)) = \{f(n) : \forall c > 0, \exists n_0 \text{ tale che} \\ \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq c g(n) \leq f(n)\}$$

Notare:

$$\omega(g(n)) \subset \Omega(g(n))$$

$$f(n) = \omega(g(n)) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

## Riassumendo .....

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow 0 < c_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_2 < \infty \quad \text{asintoticamente}$$

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow 0 < \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_2 < \infty \quad \text{asintoticamente}$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow 0 < c_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \quad \text{asintoticamente}$$

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$$f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

## Polinomi .....

$$P(n) = a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + \dots + a_0 \quad a_d > 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} P(n) &= \Theta(n^d) \\ P(n) &= O(n^d) \\ P(n) &= \Omega(n^d) \end{aligned}$$

## Esponenziali .....

$$\begin{aligned} f(n) &= a^n \\ a &> 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^d} &= \infty \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} a^n &= \omega(n^d) \\ a^n &= \Omega(n^d) \end{aligned}$$

## Logaritmi .....

$$\begin{aligned} f(n) &= \log_b(n) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\log_b(n)]^c}{n^d} &= 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \log_b(n) &= o(n^d) \\ \log_b(n) &= O(n^d) \end{aligned}$$

## Fattoriali .....

$$f(n) = n! = n * (n-1) * \dots * 2 * 1 \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} n! &= o(n^n) \\ n! &= \omega(a^n) \end{aligned}$$

## Proprieta' della notazione asintotica

### Transitivita'

$$\begin{array}{llll} f(n) = \Theta(g(n)) & e & g(n) = \Theta(h(n)) & \Rightarrow f(n) = \Theta(h(n)) \\ f(n) = O(g(n)) & e & g(n) = O(h(n)) & \Rightarrow f(n) = O(h(n)) \\ f(n) = \Omega(g(n)) & e & g(n) = \Omega(h(n)) & \Rightarrow f(n) = \Omega(h(n)) \\ f(n) = o(g(n)) & e & g(n) = o(h(n)) & \Rightarrow f(n) = o(h(n)) \\ f(n) = \omega(g(n)) & e & g(n) = \omega(h(n)) & \Rightarrow f(n) = \omega(h(n)) \end{array}$$

### Riflessivita'

$$\begin{array}{l} f(n) = \Theta(f(n)) \\ f(n) = O(f(n)) \\ f(n) = \Omega(f(n)) \end{array}$$

### Simmetria

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$$

### Simmetria trasposta

$$\begin{array}{ll} f(n) = O(g(n)) & \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n)) \\ f(n) = o(g(n)) & \Leftrightarrow g(n) = \omega(f(n)) \end{array}$$