Appunti di matematica discreta

Prof. C. Morini

Anno Accademico 2005-2006

Indice

Capitolo 1

Nozioni di base sugli insiemi

1.1 Premessa

Ai fini della presente trattazione adotteremo il concetto primitivo, intuitivo di insieme, come gruppo, raccolta, collezione di oggetti.

Per indicare gli insiemi useremo le lettere maiuscole dell'alfabeto latino $(A, B, C, ...)$; per indicare gli elementi di un insieme useremo le lettere minuscole dell'alfabeto latino $(a, b, c, ...)$.

Dato l'insieme A, l'espressione $x \in A$ significa che x appartiene ad A.

Con il simbolo $\emptyset$ indicheremo l'insieme vuoto, cioè l'insieme che non contiene alcun elemento.

1.2 Rappresentazione di un insieme

1.2.1 Rappresentazione per elencazione

Un insieme può essere rappresentato mediante l'elencazione dei suoi elementi, così:

$$A = \{a, b, c\}$$

Il limite di questo tipo di rappresentazione risulta evidente ove sia necessario rappresentare insiemi contenenti infiniti elementi.

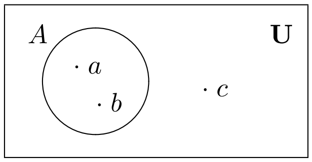
1.2.2 Rappresentazione per proprietà caratteristica

Un insieme può essere rappresentato mediante l'espressione di una proprietà caratteristica dei suoi elementi, così:

$$A = \{\ x \ \mid \ x \ \text{ ha la proprietà } \ P\ \}$$

1.2.3 Rappresentazione grafica mediante diagrammi di Venn

Un insieme può essere rappresentato dalla porzione di superficie piana delimitata da una linea chiusa ed i suoi elementi da punti del piano. Questi, se appartengono all'insieme, si troveranno all'interno della superficie chiusa che lo rappresenta, altrimenti si troveranno all'esterno.



U	è l'insieme universo.
A	è l'insieme che contiene gli elementi a, b
c	è un elemento che non appartiene ad A

1.3 Insiemi fondamentali

Indicheremo con simboli speciali gli insiemi fondamentali:

$\mathbb{N}$	Insieme dei numeri naturali	$\{0, 1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Z}$	Insieme dei numeri relativi	$\{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$
$\mathbb{Q}$	Insieme dei numeri razionali	$\{0, \pm1, \pm\frac{1}{2}, ..., \pm\frac{a}{b}\}$
$\mathbb{R}$	Insieme dei numeri reali.	
$\mathbb{C}$	Insieme dei numeri complessi.	

1.4 Sottoinsiemi

L'insieme B è *sottoinsieme* di A se e solo se ogni elemento di B è anche un elemento di A.

$$B \subseteq A \;\Leftrightarrow\; \forall\, b \in B,\; b \in A$$

La proprietà di un insieme, consistente nell'essere sottoinsieme di un altro insieme,

- è transitiva: dati gli insiemi A, B, C, se $C \subseteq B \subseteq A$ allora $C \subseteq A$
- è riflessiva: $A \subseteq A$, cioè ogni insieme è un sottoinsieme di sè stesso.
- per l'insieme vuoto, vale nei confronti di qualsiasi insieme: $\emptyset \subseteq A, \;\; \forall\, A$

Dati due insiemi A, B, B si dice *sottoinsieme proprio* di A e si indica con $B \subset A$ se

- B è sottoinsieme di A e
- B non coincide con A, cioè: $\exists\, a \in A$ tale che $a \notin B$.

1.5 Insiemi uguali

Dati due insiemi A, B, $A = B$ se e solo se A e B hanno gli stessi elementi.

Per dimostrare che due insiemi sono uguali si procede in questo modo:

a) si dimostra che $A \subseteq B$;

b) si dimostra che $B \subseteq A$;

Da a) e b) si ricava che $A = B$.

1.6 Operazioni sugli insiemi

1.6.1 Intersezione

Dati due insiemi A, B, la loro intersezione è l'insieme contenente gli elementi che appartengono sia ad A che a B:

$$A \cap B = \{\ x \ \mid \ x \in A \ \ e \ \ x \in B\ \}$$

Se due insiemi non hanno elementi in comune, cioè se $A \cap B = \emptyset$, si dicono *disgiunti*.

Proprietà dell'intersezione

a) Proprietà associativa - Siano A, B, C insiemi qualunque: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

b) Proprietà commutativa - Siano A, B insiemi qualunque: $A \cap B = B \cap A$;

c) Proprietà di idempotenza - Sia A un insieme qualunque: $A \cap A = A$;

d) Sia A un insieme qualunque: $A \cap \emptyset = \emptyset$;

Per la proprietà associativa, dati gli insiemi $A_1, A_2, ..., A_n$, è possibile scrivere:

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

1.6.2 Unione

Dati due insiemi A, B, la loro unione è l'insieme contenente gli elementi che appartengono ad A e quelli che appartengono B:

$$A \cup B = \{\ x \ \mid \ x \in A \ \ o \ \ x \in B\ \}$$

Dalla definizione si evince che $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$.

Proprietà dell'unione

a) Proprietà associativa - Siano A, B, C insiemi qualunque: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

b) Proprietà commutativa - Siano A, B insiemi qualunque: $A \cup B = B \cup A$;

c) Proprietà di idempotenza - Sia A un insieme qualunque: $A \cup A = A$;

d) Sia A un insieme qualunque: $A \cup \emptyset = A$;

Per la proprietà associativa, dati gli insiemi $A_1, A_2, ..., A_n$, è possibile scrivere:

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Proprietà distributive che legano $\cap$ e $\cup$
Siano A, B, C insiemi qualunque:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Esercizi
Siano A, B, C sottoinsiemi di $\mathbf{U}$; dimostrare che

a) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$;

b) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$;

c) $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$;

1.6.3 Complemento

Dato un insieme A sottoinsieme di $\mathbf{U}$, si dice *complemento* di A e si indica con A' l'insieme degli x che appartengono ad $\mathbf{U}$, ma non ad A:

$$A' = \{ \ x \in \mathbf{U} \ \mid \ x \notin A \ \}$$

Proprietà del complemento

a) $\mathbf{U}' = \emptyset$ e $\emptyset' = \mathbf{U}$;

b) $A \cup A' = \mathbf{U}$ e $A \cap A' = \emptyset$;

c) $(A')' = A$;

Leggi di De Morgan

d) $(A \cup B)' = A' \cap B'$;

e) $(A \cap B)' = A' \cup B'$;

1.6.4 Differenza

Dati due insiemi A, B, la differenza $A - B$ è l'insieme contenente gli elementi che appartengono ad A ma non a B:

$$A - B = \{\ x \in A \ \mid \ x \notin B\ \}$$

Come si può facilmente osservare, la differenza non gode della proprietà commutativa: $A - B \neq B - A$.

1.6.5 Differenza simmetrica

Dati due insiemi A, B, la loro *differenza simmetrica* è l'insieme contenente gli elementi che appartengono ad A ma non a B e quelli che appartengono a B ma non ad A:

$$A \dot{-} B = (A - B) \cup (B - A)$$

La differenza simmetrica gode della proprietà commutativa: $A \dot{-} B = B \dot{-} A$.

Esercizio
Dimostrare che $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

1.7 Insieme delle parti di un insieme

Dato un insieme A, l'insieme i cui elementi sono tutti e soli i sottoinsiemei di A viene detto *insieme delle parti di A*.

Ad esempio:

dato l'insieme $A = \{1, 2\}$, $P(A) = \{\ \emptyset,\ \{1, 2\},\ \{1\},\ \{2\}\ \}$;

dato l'insieme $B = \{1, 2, 3\}$, $P(B) = \{\ \emptyset,\ \{1, 2, 3\},\ \{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{2, 3\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\}\ \}$.

Capitolo 2

Relazioni binarie

2.1 Coppie ordinate

Siano A, B insiemi non vuoti, eventualmente può essere $B = A$, per coppia ordinata (a, b) si intende un insieme di due elementi $a \in A, b \in B$ in cui si distingue un primo elemento a ed un secondo elemento b. Per cui $(a, b) \neq (b, a)$ avendo sì gli stessi elementi ma in ordine differente.

Dal punto di vista insiemistico, la coppia ordinata (a, b) è l'insieme $\{ \{a\}, \{a, b\} \}$.

L'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$ forma il prodotto cartesiano $A \times B$ dei due insiemi A, B.

2.2 Relazioni binarie

Un buon esempio di relazione binaria è fornito dalla nozione di divisibilità in $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ (insieme dei numeri naturali). Dati due numeri naturali a, b ci possiamo chiedere se a divide b (cioè a divide b senza resto): se è così, diremo che a è nella relazione D (divide) con b e scriveremo $a\,D\,b$.
Osserviamo subito che la relazione D non è simmetrica cioè può essere $a\,D\,b$ ma non $b\,D\,a$: ad esempio $2\,D\,6$ ma non è $6\,D\,2$. Se $a\,D\,b$, ha senso scrivere (a, b), quindi una relazione determina un sottoinsieme del prodotto cartesiano di due insiemi (nel caso di D, un sottoinsieme di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$).

Come altro esempio consideriamo l'insieme P dei punti del piano della Geometria Elementare e l'insieme L delle rette dello stesso piano. Dato un punto $p \in P$ ed una retta $l \in L$, può essere che $p \in l$ (cioè p sta su l); questa è una relazione binaria da P ad L cioè un sottoinsieme di $P \times L$:

$$S = \{ \ (p, l) \ \mid \ p \in P, \ l \in L \ e \ p \in l \ \}$$

Scriveremo quindi $p\,S\,l$ per $p \in l$. Ciò che deve essere chiaro da questi esempi è che una relazione binaria fra due insiemi non vuoti A, B (una relazione $A \to B$) determina un unico sottoinsieme di $A \times B$ e, viceversa, un sottoinsieme di $A \times B$ determina una relazione binaria da A a B.

Definizione
Una relazione binaria da un insieme $A \neq \emptyset$ ad un insieme $B \neq \emptyset$ è definita essere un sottoinsieme di $A \times B$.

Se R è una relazione binaria da A a B ed $(a, b) \in R$ allora scriveremo $a\,R\,b$ e diremo che a è nella relazione R con b.

Per indicare che a non è nella relazione R con b, scriveremo: $a \not R b$.

Esercizio 1
Sia P l'insieme dei numeri primi e definiamo una relazione $P \to \mathbb{N}$, D, tramite $p\,D\,n$ se p divide n.

a) Trovare tutti i $p \in P$ tali che $p\,D\,126$.
b) Indicare tutti gli n tali che $3\,D\,n$.

2.2.1 Dominio e immagine di una relazione

Siano A, B insiemi non vuoti, sia R una relazione binaria $A \to B$. Il dominio di R è l'insieme denotato con $\operatorname{dom} R$ definito da

$$\operatorname{dom} R = \{\, a \in A \;\mid\; \exists\, b \in B \text{ con } a\,R\,b \,\}$$

L'immagine di R è l'insieme denotato con $\operatorname{Im} R$ definito da

$$\operatorname{Im} R = \{\, b \in B \;\mid\; \exists\, a \in A \text{ con } a\,R\,b \,\}$$

2.2.2 Caratteristiche di una relazione

Definizione
Sia $A \neq \emptyset$; una relazione binaria $R,\ A \to A$, si dice simmetrica se $a\,R\,a'$ implica $a'\,R\,a$; $a, a' \in A$.

Definizione
Sia $A \neq \emptyset$; una relazione binaria $R,\ A \to A$, si dice riflessiva se $a\,R\,a$ per ogni $a \in A$.

Definizione
Sia $A \neq \emptyset$; una relazione binaria $R,\ A \to A$, si dice transitiva se

$$a\,R\,a' \text{ ed } a'\,R\,a'' \;\Rightarrow\; a\,R\,a''; \;\; a, a', a'' \in A.$$

Esercizio 2
Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Data la relazione $R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 4)\}$,
vedere se R_1 è riflessiva, simmetrica, transitiva.

Data la relazione $R_2 = \{(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2)\}$,
vedere se R_2 è riflessiva, simmetrica, transitiva.

Data la relazione $R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$,
vedere se R_3 è riflessiva, simmetrica, transitiva.

2.2.3 Rappresentazione di una relazione

Rappresentazione mediante una matrice

Supponiamo che A, B siano insiemi non vuoti, finiti, diciamo $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}, B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ ed R una relazione $A \to B$. Un modo per rappresentare la relazione R è quella di costruire una tabella rettangolare avente m righe ed n colonne in cui l'i-esima riga corrisponde all'elemento a_i, $1 \leq i \leq m$, e la j-esima colonna all'elemento b_j, $1 \leq j \leq n$. Specificatamente se è $a_i \, R \, b_j$ cioè se $(a_i, b_j) \in R$ allora, nella posizione della tabella corrispondente all'intersezione tra la i-esima riga e la j-esima colonna scriveremo 1, altrimenti 0. Diremo questa tabella di 1 e 0 la matrice della relazione R.

Esercizio 3

Scrivere le matrici delle relazioni R_1, R_2, R_3 dell'esercizio 2.

Esercizio 4

Un torneo di tennis coinvolge 5 giocatori e ciascuno di essi incontra gli altri esattamente una volta. Se denotiamo con $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ l'insieme dei giocatori, allora i risultati delle partite si possono vedere come rappresentati da una relazione $A \to A$ dove:

$a_i \, R \, a_j$ se a_i batte a_j

Supponiamo che la relazione risultante alla fine del torneo sia

$R = \{ \, (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_5), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_4), (a_3, a_5), (a_4, a_1), (a_5, a_2), (a_5, a_4) \, \}$

Scrivere la matrice di R.

Rappresentazione mediante un grafo orientato

Supponiamo ora che R sia una relazione da un insieme non vuoto, finito, A ad A. Un'altra rappresentazione di R oltre quella tramite una matrice di 1 e 0 è quella geometrica che è ottenuta nel modo seguente:

- a ciascun elemento di A facciamo corrispondere un punto del piano;
- se è $a_1 \, R \, a_2$ per qualche $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$, allora tracciamo un segmento orientato od un arco di curva orientata, non intrecciata da a_1 ad a_2;
- se è $a \, R \, a$ per qualche $a \in A$, tracciamo una curva chiusa, orientata, non intrecciata, che parte da a e finisce in a.

$a_1 \, R \, a_2$: $a_1 \longrightarrow a_2$ oppure $a_1 \curvearrowright a_2$ $\qquad a \, R \, a$: $a \circlearrowright$

La struttura geometrica che otteniamo è un grafo finito orientato.

Esercizio 5

Consideriamo l'insieme $\{1, 2\}$ e definiamo una relazione da $P(\{1, 2\})$ a $P(\{1, 2\})$ così:

$$A \, S \, B \text{ se } A \subseteq B$$

esibire il grafo finito, orientato corrispondente ad S.

N.B. Se nella relazione R sull'insieme finito, A è $(a_1, a_2) \in R$ ed $(a_2, a_1) \in R$ allora nel grafo finito, orientato che la rappresenta conviene unire a_1, a_2 con una sola linea.

2.3 Applicazioni o funzioni

Le applicazioni o funzioni sono particolari relazioni binarie.

Definizione

Una relazione binaria f da un insieme $A \neq \emptyset$ ad un insieme $B \neq \emptyset$ è detta una funzione da A a B e denotata con $f : A \to B$ se, dato $a \in A$, esiste un unico $b \in B$ con $(a, b) \in f$.

In tal caso diremo che b è l'immagine di a tramite f e scriveremo $b = f(a)$. Ci si riferisce a b anche come al valore che f assume su a.

Esercizio 6

Determinare quali delle seguenti relazioni binarie sono funzioni:

a) f_1 dall'insieme $\{1, 2, 3\}$ all'insieme $\{1, 2, 3\}$ definita da $f_1 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$.

b) f_2 dall'insieme $\{1, 2, 3\}$ all'insieme $\{1, 2, 3\}$ definita da $f_2 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$.

c) f_3 definita su $\mathbb{R}$ (insieme dei numeri reali) da $f_3 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$.

d) f_4 definita su $\mathbb{Z}$ (insieme degli interi relativi) da $f_4 = \{(m, n) \mid n = 2m + 1\}$.

D eterminare le immagini delle f_i che sono funzioni.

Se f è una funzione il cui dominio e la cui immagine sono entrambi sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, allora è associata ad ogni coppia ordinata $(x, y) \in f$ un unico ben determinato punto del piano coordinato x, y: il punto di coordinate (x, y). L'insieme dei punti $(x, y) \in f$ è detto grafico dell'applicazione f.

Esercizio 7

Disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 4 - 2x$.

b) $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ definita da $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

c) $f : \mathbb{R} \to [-4, +\infty)$ definita da $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Applicazioni o funzioni iniettive

Data una funzione $f : A \to B$, se $(c, d) \in f$ non è detto che vi sia un solo $c \in A$ tale che $(c, d) \in f$. Infatti possono esserci più elementi $c \in A$ con $(c, d) \in f$.
Per esempio, consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita: $f(x) = x^2 + 1$; è facile osservare che $f(1) = f(-1) = 2$ cioè $(1, 2) \in f$, $(-1, 2) \in f$. In effetti $f(a) = f(-a) = a^2 + 1 \ \forall\, a \in \mathbb{R}$.

Alcune funzioni soddisfano la proprietà che per ogni $b \in \operatorname{Im} f$ esiste un solo $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Questa condizione può essere riformulata nei due seguenti modi equivalenti:

a) per $a_1, a_2 \in A$ se $f(a_1) = f(a_2)$ allora $a_1 = a_2$.

b) per $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ implica $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Tali applicazioni o funzioni sono dette *iniettive*.

Esercizio 8

Determinare quali delle seguenti applicazioni sono iniettive:

a) $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ definita da $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 1$.
b) $g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ definita da $g(1) = 3, g(2) = 2, g(3) = 1$.
c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(m) = m - 1$.
d) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $g(m) = 3m + 1$.
e) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definita da $h(m) = |m| + 1$.
f) $p : \mathbb{Q} - \{1\} \to \mathbb{Q}$ definita da $p(r) = \dfrac{r}{1-r}$.

Supponiamo di avere una funzione $f : X \to Y$ ove entrambi X, Y sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Come è possibile determinare dal grafico della f se essa è iniettiva? Abbiamo il seguente test:

> la funzione f è iniettiva se e solo se ogni retta orizzontale interseca il grafico della f al più in un punto.

Infatti, se f non è iniettiva, esistono $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ tali che $f(x_1) = f(x_2) = y_1$. Quindi abbiamo due punti distinti di coordinate rispettivamente (x_1, y_1), (x_2, y_2) del grafico della f che stanno sulla retta $y = y_1$ che è una retta orizzontale. Viceversa, se qualche retta orizzontale interseca il grafico della f in più di un punto, allora la f non è iniettiva.

Applicazioni o funzioni suriettive

Una funzione $f : A \to B$ è detta suriettiva se $\operatorname{Im} f = B$, cioè se per ogni $b \in B$ esiste almeno un $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Biiezioni

Una funzione $f : A \to B$ che sia iniettiva e suriettiva è detta una biiezione.
Se $A = B$, una biiezione è detta una *permutazione su* A.

Esercizio 9

Determinare quale delle seguenti funzioni è suriettiva:

a) $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ definita da $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 1$.
b) $g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ definita da $g(1) = 3, g(2) = 2, g(3) = 1$.
c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(m) = m - 1$.
d) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $g(m) = 3m + 1$.

Teorema

Siano A, B insiemi finiti, non vuoti con $|A| = |B| = m$ e sia $f : A \to B$ una funzione. Allora f è iniettiva se e solo se f è suriettiva.

Notazione: con il simbolo $|A|$ si indica il numero degli elementi di A.

Dimostrazione

Sia $|A| = |B| = m$ e supponiamo che $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Supponiamo ora che f sia iniettiva e dimostriamo che è suriettiva.

$\operatorname{Im} f = \{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_m)\} \subseteq B$. Se dimostriamo che $|\operatorname{Im} f| = m$ allora abbiamo che $\operatorname{Im} f \subseteq B$ e $|B| = m$ e $|\operatorname{Im} f| = m$: da questi tre fatti possiamo concludere che $\operatorname{Im} f = B$.

Per dimostrare che $\mathrm{Im}\, f = m$ è sufficiente dimostrare che $f(a_1), f(a_2), ..., f(a_m)$ sono tutti distinti. Supponiamo $f(a_i) = f(a_j)$ per qualche i, j; poichè f è iniettiva, risulta $a_i = a_j$ e quindi $i = j$. Ciò dimostra che $|\mathrm{Im}\, f| = m$.

Ora supponiamo che f sia suriettiva e dimostriamo che f è iniettiva. Poichè f è suriettiva è $\mathrm{Im}\, f = B$. Allora $|\mathrm{Im}\, f| = |\{f(a_1), f(a_2), ..., f(a_m)\}| = m$. Quindi gli $f(a_i)$ sono tutti distinti, ciò implica che, se $a_i \neq a_j$ allora $f(a_i) \neq f(a_j)$ cioè che f è iniettiva.

2.4 Dimostrazioni per induzione

É un teorema sull'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ il seguente:

Teorema

Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ per cui sono vere le due affermazioni seguenti:

1) $1 \in A$.
2) Per un k arbitrario, $k \geq 1$, se $k \in A \;\Rightarrow\; k+1 \in A$.

Allora $A = \mathbb{N}$.

Tale teorema (che non dimostriamo) è alla base della dimostrazione per induzione. Una dimostrazione per induzione ha lo schema seguente: è dato un insieme A di numeri naturali e si vuole dimostrare che $A = \mathbb{N}$. Allora la dimostrazione di questo fatto consiste dei passi seguenti:

Passo 1: Si dimostra che $1 \in A$.
Passo 2: Si assume che $k \in A$, per un k arbitrario, $k \geq 1$.
Passo 3: Si dimostra che $k + 1 \in A$.

Esempio

Dimostrare che $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione

Sia A l'insieme dei numeri naturali per cui vale l'affermazione fatta.

Passo 1: Dimostriamo che $1 \in A$, infatti $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$.

Passo 2: Dimostriamo che $k \in A$, per un k arbitrario, $k \geq 1$, quindi assumiamo che

$$1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad \textit{ipotesi di induzione}$$

Passo 3: Dimostriamo che $k + 1 \in A$.

Dobbiamo dimostrare che $1 + 2 + ... + k + (k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Per fare ciò, aggiungiamo ad entrambi i membri dell'ipotesi di induzione l'addendo $k + 1$ e otteniamo:

$$1 + 2 + ... + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$1+2+...+k+(k+1)=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=(k+1)\frac{k+2}{2}$$

Ne segue che $A=\mathbb{N}$.

Esercizio 10

Dimostrare, tramite induzione, che $n<2^n$ per tutti gli $n\in\mathbb{N}$.

Osservazione

Possiamo ora dimostrare che $lg_2\, n<n$ per tutti gli $n\in N$. Infatti la funzione $lg_2\, x$ è strettamente crescente in $(0,+\infty)$ quindi se $0<a<b$ è $lg_2\, a<lg_2\, b$. Utilizzando il fatto che $n<2^n$ dell'esercizio 10, abbiamo $lg_2\, n<lg_2\, 2^n=n$.

Esempio

Usare la dimostrazione per induzione per dimostrare che $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{n^2}\ \leq\ 2-\frac{1}{n}$

Soluzione

Sia A l'insieme dei numeri naturali per cui l'asserto vale.

Passo 1: Dimostriamo che $1\in A$, infatti $1\leq 2-\frac{1}{1}$.

Passo 2: Dimostriamo che $k\in A$, per un k arbitrario, $k\geq 1$, quindi assumiamo che

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{k^2}\ \leq\ 2-\frac{1}{k} \qquad \textit{ipotesi di induzione}$$

Passo 3: Dimostriamo che $k+1\in A$.

Per fare ciò, procediamo per assurdo e supponiamo che $k+1\notin A$, cioè che

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\ >\ 2-\frac{1}{k+1}$$

Utilizzando l'ipotesi di induzione abbiamo:

$$\left[1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\right]-\left[1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{k^2}\right]\ >\ \left(2-\frac{1}{k+1}\right)-\left(2-\frac{1}{k}\right)$$

Ne segue che:

$$\frac{1}{(k+1)^2}>\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} \qquad \text{cioè} \qquad k>(k+1)^2-k(k+1)$$

Quindi $k>(k+1)$ che è una contraddizione. Quindi $k+1\in A$.

Teorema

Per ogni numero naturale n, se X è un insieme con n elementi allora $P(X)$ ha 2^n elementi.

Dimostrazione

Sia A l'insieme dei numeri naturali per cui l'asserto vale.

Passo 1: Dimostriamo che $1 \in A$.

Sia $X = \{x\}$, allora $P(X) = \{\emptyset, X\}$ ha $2^1 = 2$ elementi.

Passo 2: Supponiamo che $k \in A$, k arbitrario, $k \geq 1$;

cioè assumiamo che per ogni insieme X con k elementi $P(X)$ abbia 2^k elementi

(*ipotesi di induzione*).

Passo 3: Dimostriamo che $k + 1 \in A$,

cioè che per ogni insieme X con $k + 1$ elementi, $P(X)$ abbia 2^{k+1} elementi.

Sia quindi X un insieme con $k + 1$ elementi e sia $x \in X$. Consideriamo l'insieme $Y = X - \{x\}$. Y ha k elementi, quindi, per ipotesi di induzione, $P(Y)$ ha 2^k elementi.
Osserviamo che ad ogni sottoinsieme C di Y corrispondono due sottoinsiemi di X: C stesso e $C \cup \{x\}$. In altre parole, X ha il doppio di sottoinsiemi di Y, cioè $|P(X)| = 2|P(Y)| = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

Quindi $A = \mathbb{N}$.

2.5 La notazione $\mathcal{O}$ (o-grande)

Nell'implementare un algoritmo su un computer, uno dei problemi principali è il tempo occorrente perchè l'algoritmo giunga a termine. Per esempio, supponiamo di utilizzare un algoritmo per ordinare, in ordine crescente, una lista di n interi dati in ordine non crescsente. L'ordine di velocità con cui l'algoritmo giunge al termine dipende da molti fattori, tra i quali uno è la grandezza n dell'input, un altro è il sistema operativo e la particolare implementazione dell'algoritmo stesso. Noi siamo interessati solo al fattore velocità come funzione $f(n)$, considerando gli altri fattori costanti. Di particolare significato è come $f(n)$ cresca al crescere di n o, in altre parole, l'ordine di grandezza di $f(n)$ per n sufficientemente grande.
Per esempio supponiamo che $f(n) = 3n^3 + 6n^2 + 7n$, allora, per n sufficientemente grande, abbiamo

$$3n^3 + 6n^2 + 7n \leq 3n^3 + 6n^2 + n^2 \leq 3n^3 + 7n^2 \leq 3n^3 + n^3 \leq 4n^3$$

Quindi la velocità di esecuzione dell'algoritmo non è maggiore di $4n^3$. Diremo allora che $f(n)$ ha ordine di grandezza n^3 o che cresce dell'ordine di n^3. Una notazione speciale è utilizzata per esprimere questi fatti.

Definizione
Date due funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ scriveremo $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ se esistono una costante C ed un intero positivo n_0 tali che $|f(n)| \leq C|g(n)|$ per tutti gli $n \geq n_0$. Leggeremo che f è o-grande di g.

Esempio
Dimostrare che $6n + 5 = \mathcal{O}(n)$.

Infatti per $n \geq 5$ è $6n + 5 \leq 7n$, quindi l'assunto.

Esempio
Dimostrare che $(n^2 + 8)(n + 1) = \mathcal{O}(n^3)$.

Infatti per $n \geq 8$ è $(n^2 + 8)(n + 1) \leq (n^2 + n)2n = 2n^3 + 2n^2 \leq 2n^3 + n^3 = 3n^3$, quindi l'assunto.

Esercizio 11

Dimostrare che $1 + 2 + ... + n = \mathcal{O}(n^2)$.

Osservazione

Negli esempi e nell'esercizio, ciascuna delle funzioni date ha ordine di grandezza n^k per un qualche $k \in \mathbb{N}$. In ogni caso la potenza di n utilizzata è la più piccola possibile, per valori sufficientemente grandi di n: per esempio osserviamo che $(n^2 + 8)(n + 1) = \mathcal{O}(n^r)$ per tutti gli $r \geq 3$ e che $(n^2 + 8)(n + 1) \neq \mathcal{O}(n^r)$ se $n < 3$.

Capitolo 3

Algebra lineare

3.1 N-uple ordinate di numeri reali

Una n-upla ordinata di numeri reali è caratterizzata da n numeri reali, che sono i suoi elementi, e dall'ordine in cui si considerano questi numeri. Così la n-upla ordinata $(a_1, ..., a_n)$ di n numeri reali è costituita dai numeri $a_1, ..., a_n$ e dall'ordine in cui a_1 è il primo elemento della n-upla, a_2 il secondo, ..., a_n l'n-esimo elemento.

Due n-uple ordinate di numeri reali $(a_1, ..., a_n)$ e $(b_1, ..., b_n)$ sono uguali se $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$, cioè hanno gli stessi elementi nello stesso ordine.

L'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali si indicherà con il simbolo $\mathbb{R}^n$.

Avremo così una famiglia infinita di insiemi: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, ..., \mathbb{R}^n, ...$

Indicheremo con $\underline{a}$ la n-upla ordinata di numeri reali $(a_1, ..., a_n)$.

3.1.1 Somma di n-uple $\in \mathbb{R}^n$

Date due n-uple ordinate di numeri reali: $\underline{a} = (a_1, ..., a_n)$, $\underline{b} = (b_1, ..., b_n)$; $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$, definiamo una operazione, che ciameremo somma ed indicheremo con il simbolo $+$, fra esse, in questo modo:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$$

Come si vede dalla definizione, la somma fra due elementi di $\mathbb{R}^n$ è ancora un elemento di $\mathbb{R}^n$. Quindi la somma fra due elementi di $\mathbb{R}^n$ è un'operazione interna ad $\mathbb{R}^n$.

Proprietà di $(\mathbb{R}^n, +)$

1) $+$ è un'operazione associativa: $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$.
2) $+$ è un'operazione commutativa: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$.
3) Esiste un elemento neutro per $+$, che è unico; cioè l'elemento $\underline{0} = (0, ..., 0)$, la n-upla di tutti zeri, tale che per ogni $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ è $\underline{a} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{a} = \underline{a}$.

4) Per ogni $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ esiste uno ed un solo elemento di $\mathbb{R}^n$, che chiameremo *opposto dell'elemento* $\underline{a}$ e indicheremo con $-\underline{a}$, così definito: $-\underline{a} = (-a_1, -a_2, ..., -a_n)$ tale che $\underline{a} + (-\underline{a}) = (-\underline{a}) + \underline{a} = \underline{0}$.

L'operazione $(\mathbb{R}^n, +)$, con le proprietà elencate, rappresenta un *gruppo abeliano.*

Gli elementi $\underline{a}$ di $\mathbb{R}^n$ verranno detti *vettori* ad n componenti (reali); se $\underline{a} = (a_1, ..., a_n)$, i numeri $a_1, a_2, ..., a_n$ verranno detti componenti di $\underline{a}$ ed a_1 sarà la prima componente, a_2 la seconda componente, ..., a_n la n-esima componenete.

Chiameremo gli elementi di $\mathbb{R}$ *scalari.*

3.1.2 Prodotto per scalare

Sia $\underline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Definiamo il *prodotto per scalare* di $\underline{a}$ per α nel modo seguente:

$$\alpha\underline{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, ..., \alpha a_n)$$

Il risultato è ancora un elemento di $\mathbb{R}^n$.

Proprietà del prodotto per scalare

1) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$; risulta $\alpha(\beta\underline{a}) = (\alpha\beta)\underline{a}$.

2) $1\underline{a} = \underline{a} \ \forall \ \underline{a} \in \mathbb{R}^n$.

3) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$; risulta $(\alpha + \beta)\underline{a} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{a}$.

4) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$; risulta $\alpha(\underline{a} + \underline{b}) = \alpha\underline{a} + \alpha\underline{b}$.

5) $0\underline{a} = \underline{0} \ \forall \ \underline{a} \in \mathbb{R}^n$.

La terna ordinata ($\mathbb{R}^n$, +, *prodotto per scalare*), poichè + è associativa, commutativa, esiste uno ed un solo elemento neutro, esiste per ogni elemento di $\mathbb{R}^n$ uno ed un solo opposto e poichè il prodotto per scalare gode delle proprietà sopra menzionate, è detta *spazio vettoriale reale* di $\mathbb{R}^n$;

3.2 Combinazioni lineari

Sia $S = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m\}$ un sottoinsieme non vuoto, finito, di $\mathbb{R}^n$; siano $\alpha_1, ..., \alpha_m$ m scalari (non necessariamente distinti); l'espressione $\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + ... + \alpha_m\underline{v}_m$ è detta *combinazione lineare* dei vettori $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m$ secondo gli scalari $\alpha_1, ..., \alpha_m$.

Ogni combinazione lineare dei vettori appartenenti ad S è ancora un elemento di $\mathbb{R}^n$, cioè un vettore ad n componenti. Osserviamo che $\underline{0} = 0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + ... + 0\underline{v}_m$

Indichiamo con $L(S)$ la totalità delle combinazioni lineari degli elementi di S:

$$L(S) = \{\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + ... + \alpha_m\underline{v}_m \ | \ \alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}\}$$

Proprietà dell'insieme $L(S)$

1) $L(S)$ non è mai vuoto:

   $\underline{0} \in L(S)$; $\quad \underline{v}_1, ..., \underline{v}_m \in L(S)$, $\quad$ infatti:

   $\underline{0} = 0\underline{v}_1 + ... + 0\underline{v}_m$
   $\underline{v}_1 = 1\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + 0\underline{v}_3 + ... + 0\underline{v}_m$
   ...
   $\underline{v}_m = 0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + 0\underline{v}_3 + ... + 0\underline{v}_{m-1} + 1\underline{v}_m$

2) $L(S)$ è chiuso rispetto alla somma di vettori, cioè, presi due vettori di $L(S)$, ossia le due combinazioni lineari di $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m$, la loro somma è ancora un elemento di $L(S)$.

3) $L(S)$ è chiuso rispetto al prodotto per scalare, cioè, preso $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\underline{w} \in L(S)$ è $\alpha\underline{w} \in L(S)$.

$L(S)$ verrà perciò detto *sottospazio vettoriale* di $\mathbb{R}^n$, generato da S, quindi $\emptyset \subset S \subset L(S) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Esempio
Se $S = \{\underline{0}\}$ allora $L(S) = \{\underline{0}\}$. Se $S = \{\underline{v}\}$ con $\underline{v} \neq \underline{0}$ allora $L(S) = \{\alpha\underline{v} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Osservazioni
Se $\underline{w} = \alpha_1\underline{v}_1 + ... + \alpha_m\underline{v}_m \in L(S)$ scriveremo:

$$\underline{w} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\underline{v}_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, ..., m.$$

Siano $(1,0)$, $(0,1)$ due elementi di $\mathbb{R}^2$, allora sappiamo che $(0,0) = 0(1,0) + 0(0,1)$ ed osserviamo che i due scalari (coincidenti in 0) della combinazione lineare di $(1,0)$ e $(0,1)$ sono gli unici per cui otteniamo come risultato $(0,0)$.
Infatti, sia $(0,0) = x(1,0) + y(0,1)$ allora, si verifica facilmente che deve essere $x = y = 0$.

Siano, invece, $(1,1)$ e $(2,2)$ i due elementi di $\mathbb{R}^2$ considerati, allora è $(0,0) = 0(1,1) + 0(2,2)$ ma è anche $(0,0) = (-2)(1,1) + 1(2,2)$. Quindi è possibile ottenere il vettore nullo $\underline{0}$ di $\mathbb{R}^2$ tramite scalari non nulli a partire dai vettori $(1,1)$ e $(2,2)$.

Dato $S = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m\}$ sottoinsieme non vuoto, finito, di $\mathbb{R}^n$, diremo che S genera il vettore $\underline{v}$ di $\mathbb{R}^n$ se $\underline{v} \in L(S)$, cioè se esistono m scalari $\alpha_1, ..., \alpha_m$ tali che $\underline{v} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\underline{v}_i$.

Diremo che S genera il vettore $\underline{v}$ *in maniera univoca* se $\underline{v} \in L(S)$ ed, inoltre,

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\underline{v}_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i\underline{v}_i \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \beta_1, \ \alpha_2 = \beta_2, \ ..., \ \alpha_m = \beta_m.$$

Dalle osservazioni precedenti ricaviamo che i vettori $(0,1)$ e $(1,0)$ generano in maniera univoca il vettore $(0,0)$, mentre i vettori $(1,1)$ e $(2,2)$ non generano in maniera univoca il vettore $(0,0)$.

Proposizione

Sia S un insieme finito, non vuoto di elementi di $\mathbb{R}^n$. Allora S genera in maniera univoca ogni vettore di $L(S)$ se e solo se i vettori di S generano in maniera univoca il vettore nullo.

Dimostrazione

Se S genera in maniera univoca ogni elemento di $L(S)$, allora, in particolare, genererà in maniera univoca il vettore $\underline{0} \in L(S)$. Viceversa, supponiamo che S generi il vettore $\underline{0}$ in maniera univoca e sia $\underline{v} \in L(S)$. Dimostriamo che S genera $\underline{v}$ in maniera univoca; se così non fosse avremmo:

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \underline{v}_i; \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, ..., m, \quad \underline{v}_i, ..., \underline{v}_m \in S \text{ e } \{\alpha_1, ..., \alpha_m\} \neq \{\beta_1, ..., \beta_m\}$$

Ma, allora

$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + ... + \alpha_m \underline{v}_m$

$\underline{v} = \beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + ... + \beta_m \underline{v}_m$

Sottraendo membro a membro avremmo:

$\underline{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\underline{v}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\underline{v}_2 + ... + (\alpha_m - \beta_m)\underline{v}_m$

ed almeno una delle differenze $\alpha_i - \beta_i$, $i = 1, ..., m$ è diversa da 0, poichè $\{\alpha_1, ..., \alpha_m\} \neq \{\beta_1, ..., \beta_m\}$, ma, allora, avremmo che il vettore $\underline{0}$ non sarebbe rappresentabile univocamente dai vettori $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m$, infatti avremmo due rappresentazioni distinte per esso:

$\underline{0} = 0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + ... + 0\underline{v}_m$

$\underline{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\underline{v}_1 + ... + (\alpha_m - \beta_m)\underline{v}_m$

3.3 Indipendenza lineare

Si dice che un insieme finito, non vuoto S di vettori di $\mathbb{R}^n$ è *linearmente indipendente* se genera in maniera univoca il vettore $\underline{0}$. Altrimenti, si dice *linearmente dipendente*.

Esempio

I vettori $(1, 0), (0, 1)$ di $\mathbb{R}^2$ sono linearmente indipendenti.
I vettori $(1, 1), (2, 2)$ di $\mathbb{R}^2$ sono linearmente dipendenti.

In altre parole, l'insieme $S = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m\}$ di elementi di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente se $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underline{v}_i$ implica $\alpha_i = 0$ per ogni $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_m$. Lo stesso insieme S si dice linearmente dipendente se esiste una relazione del tipo $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underline{v}_i$ con almeno un $\alpha_i \neq 0$.

Ogni sottoinsieme di un insieme linearmente indipendente è linearmente indipendente.

Ogni insieme contenente il vettore $\underline{0}$ è linearmente dipendente.

Se un sottoinsieme T di un insieme S non vuoto, finito di vettori di $\mathbb{R}^n$ è linearmente dipendente, allora S è linearmente dipendente.

Teorema

Sia S un insieme finito, non vuoto di vettori di $\mathbb{R}^n$, contenga r vettori e sia linearmente indipendente. Allora $r+1$ vettori di $L(S)$ sono linearmente dipendenti.

Non dimostriamo questo teorema.

Prodotto scalare (cenni preliminari)

Siano $\underline{v} = (v_1, ..., v_n)$, $\underline{w} = (w_1, ..., w_n)$ due vettori di $\mathbb{R}^n$, definiamo il *prodotto scalare* dei due vettori $\underline{v}, \underline{w}$ lo scalare così ottenuto:

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v_1 w_1 + v_2 w_2 + ... + v_n w_n$$

Le proprietà del prodotto scalare ed altri approfondimenti saranno oggetto di una specifica sezione.

Vettori ortogonali

Siano $\underline{v}, \underline{w}$ due vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$. $\underline{v}, \underline{w}$ si diranno *ortogonali* se $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$.

Sia $S = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_r\}$ un insieme finito, non vuoto di vettori di $\mathbb{R}^n$. S non contenga il vettore nullo. S si dirà un *insieme* ortogonale di vettori se $\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j = 0$ per ogni i, j con $i \neq j$.

Proposizione

Un insieme $S = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_r\}$ finito, non vuoto, ortogonale di vettori di $\mathbb{R}^n$, tale che $\underline{0} \notin S$, è linearmente indipendente.

Dimostrazione

Sia $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} c_i \underline{v}_i = \underline{0}$, vogliamo dimostrare sotto le ipotesi dette, che $c_1 = c_2 = ... = c_r = 0$. Moltiplicando scalarmente entrambi i membri dell'uguaglianza per $\underline{v}_1$ otteniamo: $\underline{v}_1 \cdot \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{r} c_i \underline{v}_i \right) = \underline{v}_1 \cdot \underline{0}$

ora $\underline{v}_1 \cdot \underline{0} = 0$ e $\underline{v}_1 \cdot (c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + ... + c_r \underline{v}_r) = c_1 \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 \cdot \underline{v}_1 + c_r \underline{v}_r \cdot \underline{v}_1 = c_1 \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 + 0 + 0 + ... + 0$;

onde $c_1 \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 = 0$, ma $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_1 \neq 0$ poichè $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$, onde $c_1 = 0$.

Ripetendo la moltiplicazione scalare con $\underline{v}_2$, otteniamo, con gli stessi calcoli, che $c_2 = 0$. Possiamo proseguire, moltiplicando scalarmente per $\underline{v}_3, \underline{v}_4, ..., \underline{v}_r$ ottenendo rispettivamente $c_3 = 0, c_4 = 0, ..., c_r = 0$.

Teorema

Sia S un insieme ortogonale di vettori di $\mathbb{R}^n$, S generi il vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$: $\underline{v} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \underline{v}_i$, $S = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_r\}$ allora i coefficienti della combinazione lineare: $\alpha_1, ..., \alpha_r$ sono dati da:

$$\alpha_j = \frac{\underline{v} \cdot \underline{v}_j}{\underline{v}_j \cdot \underline{v}_j} \qquad j = 1, 2, ..., r$$

3.4 Basi e dimensione

Un insieme finito, nun vuoto S di vettori di $\mathbb{R}^n$ si dice una base di $\mathbb{R}^n$ se:

1) $L(S) = \mathbb{R}^n$ (S genera $\mathbb{R}^n$).
2) S è linearmente indipendente.

Se S è un insieme ortogonale ed una base per $\mathbb{R}^n$ allora si dirà una *base ortogonale*.

Ad esempio, $\{(1,0),(0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

Una base di $\mathbb{R}^n$ è un insieme finito, non vuoto di vettori di $\mathbb{R}^n$ tale che è linearmente indipendente e genera ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ (cioè ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ si può scrivere come una combinazione lineare di elementi dell'insieme).

Definizione
Un insieme linearmente indipendente di elementi di $\mathbb{R}^n$ si dice *linearmente indipendente massimale* se non è sottoinsieme proprio di alcun insieme linearmente indipendente.

Una base di $\mathbb{R}^n$ è un insieme linearmente indipendente massimale. Viceversa, un insieme finito, non vuoto di elementi di $\mathbb{R}^n$, che sia linearmente indipendente massimale, è una base di $\mathbb{R}^n$.

Definizione
Sia S un insieme finito, non vuoto di elementi di $\mathbb{R}^n$; S generi $\mathbb{R}^n$ (cioè $L(S) = \mathbb{R}^n$). Si dirà un insieme di generatori di $\mathbb{R}^n$ minimale se nessun suo sottoinsieme proprio T è tale che $L(T) = \mathbb{R}^n$.

Una base di $\mathbb{R}^n$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^n$ minimale. Viceversa, è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^n$ minimale è una base di $\mathbb{R}^n$.

Teorema
Tutte le basi di $\mathbb{R}^n$ hanno lo stesso numero di elementi.

Non dimostriamo questo teorema.

Ogni spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base.

Il numero di elementi comune ad ogni base di $\mathbb{R}^n$ è sotto dimensione dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$.

Se uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n, una sua base è data dall'insieme

$$\{(1,0,0,...,0),(0,1,0,...,0),(0,0,1,...,0),(0,0,0,...,1)\}.$$

3.5 Spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ generali

Sia V un insieme non vuoto di elementi che chiameremo *vettori*. In V sia definita un'operazione interna, binaria che chiemeremo somma ed indicheremo con $+$; tale che:

1) $+$ è associativa;
2) $+$ è commutativa;

3) esiste uno ed un solo elemento neutro per la somma, in V, che indicheremo con $\underline{0}$. Quindi è $\underline{0}+\underline{v}=\underline{v}+\underline{0}=\underline{v}$ per ogni $\underline{v}\in V$;
4) per ogni elemento $\underline{v}\in V$ esiste uno ed un solo elemento di V che indicheremo con $-\underline{v}$ tale che che $\underline{v}+(-\underline{v})=(-\underline{v})+\underline{v}=\underline{0}$; $-\underline{v}$ si dirà *opposto* di $\underline{v}$;

In V sia definita un'operazione esterna fra numeri reali (scalari) ed elementi di V il cui risultato è ancora un elemento di V e che indicheremo con $\alpha\underline{v}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\underline{v}\in V$; tale che

5) se $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; $\underline{v}\in V$ è $\alpha(\beta\underline{v})=(\alpha\beta)\underline{v}$;
6) se $\alpha\in\mathbb{R}$; $\underline{v},\underline{w}\in V$ è $\alpha(\underline{v}+\underline{w})=\alpha\underline{v}+\alpha\underline{w}$;
7) se $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; $\underline{v}\in V$ è $(\alpha+\beta)\underline{v}=\alpha\underline{v}+\beta\underline{v}$;
8) se $\underline{v}\in V$ è $1\underline{v}=\underline{v}$;
9) se $\underline{v}\in V$ è $(-1)\underline{v}=-\underline{v}$;

L'insieme V con l'operazione di somma, prodotto per numero reale che soddisfa le proprietà da 1) a 9) si dirà *spazio vettoriale reale.*

Esempi di spazi vettoriali reali sono gli $\mathbb{R}^n$ con la somma fra n-uple ordinate ed il prodotto per scalare.

Se $\underline{v},\underline{w}\in V$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ nell'ambito degli spazi vettoriali valgono le seguenti regole di calcolo:

1) $0\underline{v}=\underline{0}$;
2) $\alpha\underline{0}=\underline{0}$;
3) $(-\alpha)\underline{v}=-(\alpha\underline{v})=\alpha(-\underline{v})$;
4) se $\alpha\underline{v}=\alpha\underline{w}$ ed $\alpha\neq 0$ allora $\underline{v}=\underline{w}$;
5) se $\alpha\underline{v}=\underline{0}$ allora o $\alpha=0$ oppure $\underline{v}=\underline{0}$;
6) se $\alpha\underline{v}=\beta\underline{v}$ e $\underline{v}\neq\underline{0}$ allora $\alpha=\beta$;
7) $-(\underline{v}+\underline{w})=(-\underline{v})+(-\underline{w})$;
8) $\underline{v}+\underline{v}=2\underline{v}$; in generale, la somma di n addendi tutti uguali a $\underline{v}$ è uguale a $n\underline{v}$.

3.5.1 Sottospazio di uno spazio vettoriale reale

Sia V uno spazio vettoriale reale, S un suo sottoinsieme non vuoto. Diremo che S è un *sottospazio vettoriale* di V se:

1) $\underline{0}\in S$;
2) S è chiuso rispetto alla somma, cioè se $\underline{v},\underline{w}\in S$, $\underline{v}+\underline{w}$ è ancora in S;
3) S è chiuso rispetto al prodotto per scalare, cioè se $\alpha\in\mathbb{R}$, $\underline{v}\in S$, $\alpha\underline{v}$ è ancora in S.

3.5.2 Combinazioni lineari di un numero finito di elementi di V

Siano $\underline{v}_1,...,\underline{v}_n$ n elementi di V, diremo combinazione lineare di $\underline{v}_1,...,\underline{v}_n$ tramite gli scalari $\alpha_1,...,\alpha_n$ ogni espressione del tipo $\alpha_1\underline{v}_1+\alpha_2\underline{v}_2+...+\alpha_n\underline{v}_n$ ($\sum_{i=1}^n\alpha_i\underline{v}_i$).

Gli scalari $\alpha_1,...,\alpha_n$ verranno detti *coefficienti della combinazione lineare.*

Siano $\underline{v}_1,...,\underline{v}_n$ n elementi di V e sia $\underline{v}\in V$; se esistono degli scalari $\alpha_1,...,\alpha_n$ tali che $\underline{v}=\sum_{i=1}^n\alpha_i\underline{v}_i$, allora diremo che il vettore $\underline{v}$ è generato dai vettori $\underline{v}_1,...,\underline{v}_n$.

3.5.3 Sottospazio generato da un sottoinsieme finito non vuoto di V

Sia S un sottoinsieme non vuoto di V, consideriamo l'insieme di tutte le combinazioni lineari di elementi di S. Tale insieme, che indicheremo con $L(S)$, contiene il vettore $\underline{0}$ ed è inoltre chiuso rispetto alla somma ed al prodotto per scalare. Quindi è un sottospazio dello spazio vettoriale V; lo diremo sottospazio generato da S.

$$L(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \ \mid \ \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Se $S = \{\underline{0}\}$ allora $L(S) = \{\underline{0}\}$.

3.5.4 Insiemi finiti di vettori di V linearmente dipendenti e indipendenti

Sia $S = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n\}$ un insieme finito non vuoto di vettori di V. S si dirà linearmente dipendente (o anche che i vettori $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti) se esistono n scalari non tutti nulli, $\alpha_1, ..., \alpha_n$, tali che $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0}$.

Sia S un insieme finito non vuoto di vettori di V. S si dirà linearmente indipendente se non è linearmente dipendente.

3.5.5 Basi e dimensione di uno spazio vettoriale reale

Un insieme non vuoto di elementi di V si dirà una base per V se tale insieme genera tutti i vettori di V e se è linearmente indipendente.

Se l'insieme è finito si dirà una base finita.

Teorema
Ogni spazio vettoriale reale ammette almeno una base.

Ci limiteremo a considerare spazi vettoriali reali con basi finite.

Teorema
Per ogni spazio vettoriale reale con almeno una base finita, accade che per ogni altra sua base è finita. Inoltre tutte le sue basi finite hanno lo stesso numero di elementi.

Sia V uno spazio vettoriale reale con base finita di n elementi ($\dim_{\mathbb{R}} V = n$). Allora:

a) ogni insieme linearmente indipendente di elementi di V è sottoinsieme di qualche base di V;

b) ogni insieme di n elementi di V, linearmente indipendenti, è una base per V.

Sia V uno spazio vettoriale reale con $\dim_{\mathbb{R}} V = n$, allora, se S è un suo sottospazio vettoriale è anche $\dim_{\mathbb{R}} S \leq n$.

3.5.6 Prodotto scalare

Siano $\underline{v} = (v_1, ..., v_n)$, $\underline{w} = (w_1, ..., w_n)$ due elementi di $\mathbb{R}^n$. Definiamo prodotto scalare di $\underline{v}$ e $\underline{w}$ e lo indichiamo con il simbolo $\underline{v} \cdot \underline{w}$ lo scalare così definito:

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + ... + v_n w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

Proprietà del prodotto scalare

a) Per ogni $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ è $\underline{v}\,\underline{w} = \underline{w}\,\underline{v}$;
b) Per ogni $\underline{v}, \underline{w}, \underline{r} \in \mathbb{R}^n$ è $\underline{v}\,(\underline{w} + \underline{r}) = \underline{v}\,\underline{w} + \underline{v}\,\underline{r}$;
c) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, per ogni $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ è $\alpha\,(\underline{v}\,\underline{w}) = (\alpha\,\underline{v})\,\underline{w} = \underline{v}\,(\alpha\,\underline{w})$;
d) Per ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ è $\underline{v}\,\underline{w} > 0$;
e) $\underline{0}\,\underline{0} = 0$;
f) Se $\underline{v}\,\underline{v} = 0$ allora $\underline{v} = \underline{0}$; $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$.

3.5.7 Disuguaglianza di Chaucy-Schwarz

Per ogni $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ è $(\underline{v}\,\underline{w})^2 \leq (\underline{v}\,\underline{v})\,(\underline{w}\,\underline{w})$.

Il segno di uguaglianza vale se e soltanto se uno dei due vettori è multiplo scalare dell'altro.

3.5.8 Covarianza

Supponiamo che X, Y siano due variabili statistiche (ad esempio peso e altezza di una persona) e consideriamo un campione di n individui. Siano $x'_1, ..., x'_n$ ed $y'_1, ..., y'_n$ rispettivamente i valori delle variabili X, Y per gli elementi del campione. Sia μ_x la media aritmetica degli x'_i e μ_y la media aritmetica degli y'_i. Consideriamo i due vettori:

$$\underline{x} = (x_1, ..., x_n) \text{ ove } x_i = x'_i - \mu_x, \; i = 1, ..., n$$

$$\underline{y} = (y_1, ..., y_n) \text{ ove } y_i = y'_i - \mu_y, \; i = 1, ..., n$$

La covarianza di X e Y è data dalla formula:

$$\text{cov} = \frac{\underline{x} \cdot \underline{y}}{n}$$

se $\underline{x} \cdot \underline{y} = 0$ cioè la covarianza è nulla, allora diremo che le variabili statistiche X, Y *non sono correlate*.

3.5.9 Norma di un vettore

Sia $\underline{v} = \{\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n)$ un elemento di $\mathbb{R}^n$. Diremo norma di $\underline{v}$ e la indicheremo con il simbolo $\| \underline{v} \|$ lo scalare così definito:

$$\| \underline{v} \| = (\underline{v} \cdot \underline{v})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2}$$

Proprietà della norma di un vettore $\underline{v}$

a) $\| \underline{v} \| > 0$ se $\underline{v} \neq \underline{0}$;

b) $\| \underline{v} \| = 0$ se $\underline{v} = \underline{0}$;

c) $\| \alpha \underline{v} \| = |\alpha| \, \| \underline{v} \|, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$;

d) $\| \underline{v} + \underline{w} \| \leq \| \underline{v} \| + \| \underline{w} \|, \quad \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$;

Con riferimento all'ultima proprietà, il segno di uguaglianza vale se e solo se $\underline{v} = \underline{0}$ o $\underline{w} = \underline{0}$ oppure $\underline{v} = \lambda \, \underline{w}$ (cioè se i due vettori sono paralleli).

La diseguaglianza di Chaucy-Schwarz può essere espressa in termini di norme:

$$(\underline{v} \cdot \underline{w})^2 \; \leq \; \| \underline{v} \|^2 \cdot \| \underline{w} \|^2$$

Un'altra forma equivalente della diseguaglianza è la seguente:

$$| \, \underline{v} \cdot \underline{w} \, | \; \leq \; \| \underline{v} \| \cdot \| \underline{w} \|$$

3.5.10 Scarto quadratico medio

Supponiamo che X sia una variabile statistica e prendiamo un campione di n individui. Sia $(x_1', ..., x_n')$ la n-upla ordinata di valori che la variabile X assume sugli n individui del campione. Sia μ_x la media aritmetica degli x_i' e costruiamo un vettore $\underline{x} = (x_1, ..., x_n)$ ove $x_i = x_i' - \mu_x, \; i = 1, ..., n$. Lo *scarto quadratico medio* del vettore $\underline{x}$ è dato da:

$$\sigma = \frac{\| \underline{x} \|}{\sqrt{n}}$$

3.5.11 Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale è un'operazione definita solamente fra vettori di $\mathbb{R}^3$ ed associa a due vettori di $\mathbb{R}^3$ un altro vettore di $\mathbb{R}^3$. Se $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$, l'operazione è indicata con il simbolo $\underline{v} \times \underline{w}$ ed è così definita:

sia $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$;

$$\underline{v} \times \underline{w} = (\; v_2 \, w_3 - v_3 \, w_2, \;\; w_1 \, v_3 - v_1 \, w_3, \;\; v_1 \, w_2 - v_2 \, w_1 \;)$$

Proprietà del prodotto vettoriale
Siano $\underline{v}, \underline{w}, \underline{t} \in \mathbb{R}^3$; $\alpha \in \mathbb{R}$, allora:

a) $\underline{v} \times \underline{w} = -\underline{w} \times \underline{v}$;

b) $\underline{v} \times (\underline{w} + \underline{t}) = \underline{v} \times \underline{w} + \underline{v} \times \underline{t}$;

c) $\alpha\,(\underline{v} \times \underline{w}) = (\alpha\,\underline{v}) \times \underline{w} = \underline{v} \times (\alpha\,\underline{w})$;

d) $\underline{v}\,(\underline{v} \times \underline{w}) = 0$;

e) $\underline{w}\,(\underline{v} \times \underline{w}) = 0$;

f) $\|\,\underline{v} \times \underline{w}\,\|^2 = \|\,\underline{v}\,\|^2 - (\underline{v}\,\underline{w})^2$ *identità di Lagrange*;

g) $\underline{v} \times \underline{w} = \underline{0}$ se e solo se $\underline{v}, \underline{w}$ sono linearmente dipendenti.

In $\mathbb{R}^3$ sono definiti tre vettori detti i *versori degli assi*:

$$\underline{i} = (1,0,0), \quad \underline{j} = (0,1,0), \quad \underline{k} = (0,0,1)$$

Così definiti i vettori $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$:

$$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}, \qquad \underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}, \qquad \underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$$

Proposizione
Se i vettori $\underline{v}, \underline{w}$ di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti, si ha:

a) i vettori $\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \times \underline{w}$ di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti;

b) ogni vettore $\underline{t} \in \mathbb{R}^3$ tale che $\underline{t}\,\underline{v} = 0$ e $\underline{t}\,\underline{w} = 0$ è un multiplo scalare di $\underline{v} \times \underline{w}$ cioè $\underline{t} = \alpha\,(\underline{v} \times \underline{w})$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.5.12 Angolo fra vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$

Siano $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n - \{\underline{0}\}$: per la disuguaglianza di Chaucy-Schwarz si ha: $|\,\underline{v} \cdot \underline{w}\,| \le \|\,\underline{v}\,\| \cdot \|\,\underline{w}\,\|$.
Il secondo membro della disuguaglianza è diverso da 0 perchè $\underline{v} \neq \underline{0}$ e $\underline{w} \neq \underline{0}$. Possiamo dividere per $\|\,\underline{v}\,\| \cdot \|\,\underline{w}\,\|$ entrambi i membri della disuguaglianza, conservando il segno perchè $\|\,\underline{v}\,\| \cdot \|\,\underline{w}\,\| > 0$. Risulta:

$$\frac{|\,\underline{v} \cdot \underline{w}\,|}{\|\,\underline{v}\,\| \cdot \|\,\underline{w}\,\|} < 1 \qquad \text{cioè} \qquad -1 \le \frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{\|\,\underline{v}\,\| \cdot \|\,\underline{w}\,\|} \le 1$$

Quindi esiste uno ed un solo angolo θ nell'intervallo $(0, \pi)$ tale che:

$$\cos\theta = \frac{\underline{v} \cdot \underline{w}}{\|\,\underline{v}\,\| \cdot \|\,\underline{w}\,\|}$$

θ è detto angolo fra i vettori $\underline{v}, \underline{w}$.

Due vettori $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n - \{\underline{0}\}$ si diranno *ortogonali* se $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$.

Capitolo 4

Grafi

4.1 Grafi non orientati

Definizione

Sia V un insieme non vuoto, ρ (ro) una relazione binaria simmetrica su V tale che $v \not\rho\, v \ \forall\, v \in V$. Allora la coppia ordinata (V, ρ) si dice un *grafo non orientato*.

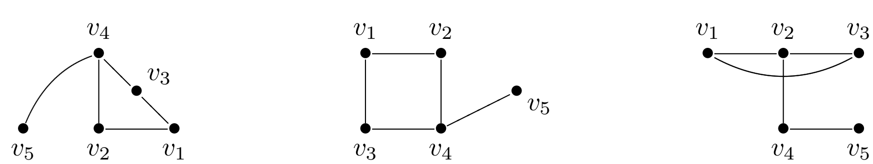
Rappresenteremo gli elementi di V come punti del piano e se $v, w \in V$ sono tali che $v\,\rho\,w$, allora uniremo i punti che rappresentano v e w con un segmento od un arco di curva non intrecciata.
Sia (V, ρ) un grafo; $v, w \in V$ e sia $v\,\rho\,w$: chiameremo il sottoinsieme v, w di cardinalità 2 il *lato* del grafo (V, ρ) tra v e w; se è $v\,\rho\,w$ allora v e w si diranno *estremi* del lato $\{v, w\}$ del grafo (V, ρ).
Gli elementi di V si diranno *vertici* o *nodi* del grafo. Quindi, dato un qualunque grafo (V, ρ) restano individuati: l'insieme dei suoi vertici V e l'insieme $L = \{\ \{v, w\} \ \mid \ v\,\rho\,w \ ; \ v, w \in V\ \}$ dei suoi lati.

Viceversa, supponiamo che sia dato un insieme non vuoto V ed un insieme L di sottoinsiemi di cardinalità 2 di V. Sull'insieme V definiamo una relazione binaria ρ ponendo: $\forall\, v, w \in V, \ v\,\rho\,w \Leftrightarrow \{v, w\} \in L$. É chiaro che la relazione ρ così definita è una relazione binaria, simmetrica su V tale che $v \not\rho\, v \ \forall\, v \in V$. Si ha quindi un grafo.
D'ora in poi, denoteremo un grafo G con il simbolo (V, L) coppia ordinata formata dall'insieme dei suoi vertici (V) e dei suoi lati (L).

É quindi equivalente definire un grafo come una coppia formata da un insieme non vuoto V e da una relazione binaria, simmetrica ρ su V tale che $v \not\rho\, v \ \forall\, v \in V$ oppure come una coppia ordinata (V, L) ove V è un insieme non vuoto ed L un insieme di sottoinsiemi di cardinalità 2 di V.

Esempio

Il grafo $G = (V, L)$ ove $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ed $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6\}$ ove $l_1 = \{v_1, v_2\}$, $l_2 = \{v_1, v_3\}$, $l_3 = \{v_2, v_3\}$, $l_4 = \{v_2, v_4\}$, $l_5 = \{v_3, v_4\}$, $l_6 = \{v_4, v_5\}$ può essere rappresentato indifferentemente con uno dei seguenti diagrammi:



In pratica, per descrivere un grafo che abbia un numero finito di vertici, conviene spesso disegnarne un diagramma invece che elencarne tutti i vertici e tutti i lati.

4.1.1 Vertici adiacenti e lati incidenti

Sia $G = (V, L)$ un grafo. Siano $v, w \in V$ due vertici distinti di G tali che $\{v, w\}$ è un lato di G. Diremo allora che i vertici v, w sono *adiacenti*.

Se l, l' sono due lati distinti di G con un vertice in comune, diremo che l, l' sono lati *incidenti*.

4.1.2 Isomorfismo tra grafi non orientati

Siano $G = (V, L)$, $G' = (V', L')$ due grafi non orientati. Un *isomorfismo* di grafi di G in G' è una biiezione $\rho : V \to V'$ tale che per ogni $v, w \in V$ si ha $\{v, w\} \in L$ se e solo se $\{\rho(v), \rho(w)\} \in L'$. Se esiste un isomorfismo tra G e G', i due grafi si diranno *isomorfi*. Ovviamente, se un diagramma rappresenta un grafo G con un numero finito di vertici, lo stesso diagramma rappresenta ogni grafo isomorfo a G nominando diversamente i suoi vertici.

Definizione
Un *automorfismo* del grafo G è un isomorfismo di G in G.

4.2 Sottografi

Sia $G = (V, L)$ un grafo, V' un sottoinsieme non vuoto di V ed L' un sottoinsieme di L tale che per ogni lato $l' = \{v, w\} \in L'$ i suoi estremi v, w stanno in V'; allora la coppia ordinata $(V', L') = G'$ è un grafo detto *sottografo* di G.

4.2.1 Sottografo generato da V'

Dato un grafo $G = (V, L)$ ed un qualunque sottoinsieme non vuoto V' di V, il grafo $G' = (V', L')$ avente V' come insieme dei suoi vertici e come insieme dei suoi lati L' (l'insieme di tutti i lati di G i cui estremi stanno in V'), si dice *sottografo di G generato da V'*.

4.3 Grafi finiti

Un grafo $G = (V, L)$ si dice *finito* se l'insieme dei suoi vertici, V, è un insieme finito.

Osservazione
Se $G = (V, L)$ è un grafo finito, allora anche l'insieme dei suoi lati è finito (per il teorema sulla cardinalità dell'insieme dei sottoinsiemi di un insieme finito).

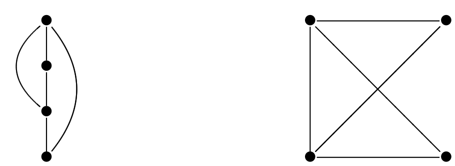
4.3.1 Grado di un vertice, numero di vertici e lati in un grafo finito

Se $G = (V, L)$ è un grafo finito e $v \in V$ è un vertice di G, diremo che v ha un grado n se v è estremo di esattamente n lati di G. Il grado di un vertice v si indicherà con $\mathrm{d}(v)$.

Diremo che il vertice v è *pari* o *dispari* a seconda che $\mathrm{d}(v)$ sia un numero pari o dispari. Un vertice di grado 0 si dirà un vertice *isolato*.

Esercizio

Sono dati i seguenti due diagrammi:



a) Nominare i vertici in modo da ottenere due grafi finiti.

b) Dimostrare che i grafi così ottenuti sono isomorfi.

c) Trovare tutti i vertici adiacenti ed i lati adiacenti. Trovare il grado di ciascun vertice.

Lemma 1

Il numero dei lati di un grafo finito è $\quad |L| = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{v \in V} \mathrm{d}(v).$

Dimostrazione

Sia t il numero degli estremi dei lati del grafo. Poichè ogni lato ha due estremi, è $t = 2|L|$. D'altra parte ogni vertice v è estremo di $\mathrm{d}(v)$ lati e quindi $t = \sum_{v \in V} \mathrm{d}(v)$. Ne segue l'assunto.

Corollario

Ogni grafo finito ha un numero pari di vertici dispari.

Dimostrazione

Per il lemma 1 è $2|L| = \sum_{v \in V} \mathrm{d}(v)$. Quindi il numero $\sum_{v \in V} \mathrm{d}(v)$ è un numero pari.

Indichiamo con V_p e V_d rispettivamente l'insieme dei vertici pari e di quelli dispari del grafo. Si ha che, ovviamente, $\sum_{v \in V_p} \mathrm{d}(v)$ è un numero pari, poichè somma di numeri pari.

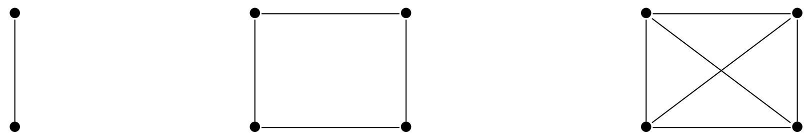
Poichè è $\sum_{v \in V_d} \mathrm{d}(v) = \sum_{v \in V} \mathrm{d}(v) - \sum_{v \in V_p} \mathrm{d}(v)$, risulta che il numero $\sum_{v \in V_d} \mathrm{d}(v)$ è un numero pari come differenza di due numeri pari.

Infine, poichè ogni addendo $\mathrm{d}(v)$ in $\sum_{v \in V_d} \mathrm{d}(v)$ è dispari, affinchè il numero $\sum_{v \in V_d} \mathrm{d}(v)$ sia pari, occorre che abbia un numero pari di addendi.

Definizione

Un grafo in cui tutti i vertici hanno lo stesso grado d si dice *regolare di grado d*.

Esempi di diagrammi di grafi regolari di grado 1, 2, 3:



Esercizio
Trovare il numero di lati di un grafo finito con n vertici, regolare di grado d.

4.4 Grafi orientati

Si tratta di grafi con i vertici collegati da segmenti o archi di una curva non intrecciata orientati.

Esempi

Definizione
Un grafo orientato è una coppia ordinata (V, S) formata da un insieme non vuoto V su cui è definita una relazione binaria S.

I grafi orientati sono talvolta detti *grafi diretti* o *digrafi*.

4.5 Multigrafi

Sia la nozione di grafo non orientato che quella di grafo orientato, si possono generalizzare al caso in cui due vertici del grafo possono eventualmente essere uniti da più lati cioè ai *multigrafi*.

Nell'esempio di seguito sono rappresentati i diagrammi di un multigrafo non orientato e di un multigrafo orientato:

Definizione

Un multigrafo orientato $G = (V, L, \rho)$ è una terna ordinata consistente di un insieme non vuoto V (insieme dei vertici), di un insieme non vuoto L (insieme dei lati) e di una applicazione $\rho : L \to V \times V$.

Se $l \in L$; $v, w \in V$ e $\rho(l) = (v, w)$ allora si dice che il lato l è orientato da v a w.
Nel caso particolare in cui $v = w$ si ha $\rho(l) = (v, v)$ in tal caso il lato l si dice un *cappio*.

Dato un multigrafo orientato $G = (V, L, \rho)$, G si dice *multigrafo orientato semplice* se c'è al più un lato da v a w, per ogni $v, w \in V$, cioè se e solo se ρ è iniettiva.

É chiaro che le nozioni di grafo orientato e di multigrafo orientato semplice sono essenzialmente equivalenti.

Dato un insieme non vuoto V, indicheremo con $P_2(V)$ l'insieme di sottoinsiemi di cardinalità 2 di V.

Esercizio

Utilizzando l'insieme $P_2(V)$ e mimando la definizione di multigrafo orientato, dare la definizione di multigrafo non orientato.

4.6 Cammini, circuiti, tracce, cicli in grafi non orientati

Definizione

Sia $G = (V, L)$ un grafo non orientato; $v, w \in V$, per *cammino* dal vertice v al vertice w intendiamo una successione finita di lati di G: $l_1 = \{z_1, z_2\}$, $l_2 = \{z_2, z_3\}$, $l_3 = \{z_3, z_4\}$, ..., $l_n = \{z_n, z_{n+1}\}$, tale che $z_1 = v$ e $z_{n+1} = w$. Diremo che n è la lunghezza del cammino.

Osservazione

Si noti che in un cammino, lati consecutivi sono incidenti. Per ogni vertice $v \in V$ c'è un unico cammino di lunghezza 0 da v a v, detto *cammino nullo*.

Definizione

Un *circuito* è un cammino di lunghezza maggiore di 0 da un vertice v allo stesso vertice v.

Definizione

Un cammino in cui nessun vertice sia ripetuto più di due volte è detto una *traccia*.

Definizione

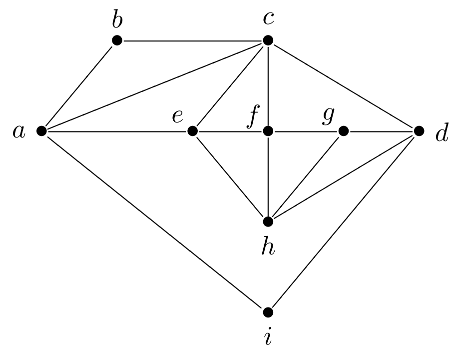
Un *ciclo* in un grafo non orientato G è una traccia in cui $z_1 = z_{n+1}$.

Definizione

Un *ciclo euleriano* in un grafo non orientato G è un ciclo che passa per ogni vertice di G.

Esercizio

Dato il seguente diagramma di un grafo finito, trovare un ciclo euleriano:

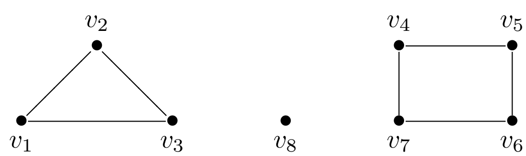


Definizione

Un grafo non orientato $G = (V, L)$ si dice *connesso* se per ogni $v, w \in V$ esiste un cammino da v a w. Un grafo che non sia connesso si dice *sconnesso*.

Esempio

Il grafo $G = (V, L)$ con $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ un cui diagramma è il seguente



è sconnesso: si noti il vertice isolato v_8.

4.7 Relazioni e classi di equivalenza

Digressione

Sia A un insieme non vuoto, R una relazione binaria su A che sia riflessiva, simmetrica e transitiva, allora R si dirà una *relazione di equivalenza su A*.

Esempi

1) Sia A l'insieme dei cittadini italiani; se $a, b \in A$ definiamo una relazione binaria R su A così: $a\,R\,b$ se a e b hanno o hanno avuto lo stesso padre biologico. R è una relazione di equivalenza su A.

2) Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme degli interi relativi. Consideriamo il numero $+3$. Definiamo una relazione binaria su $\mathbb{Z}$ così: se $a, b \in \mathbb{Z}$ diremo che $a\,R\,b$ se a e b divisi per $+3$ danno lo stesso resto. Così, per esempio, è $7\,R\,10$ perchè 7 e 10 divisi per 3 danno lo stesso resto 1. R è una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$ (ovviamente, la discussione vale per qualunque intero positivo m diverso da $+3$).

Sia A un insieme non vuoto ed R una relazione di equivalenza su A. Sia $a \in A$ e consideriamo il seguente sottoinsieme di $A : \{\, b \in A \mid a\,R\,b \,\}$. Tale sottoinsieme si indicherà con $[\,a\,]_R$ e si dirà *classe di equivalenza* dell'elemento a nella relazione R.

Osserviamo che, poichè R è riflessiva, è $a \in [\,a\,]_R$ quindi le classi di equivalenza non sono mai vuote. Inoltre, poichè R è transitiva e simmetrica, due classi di equivalenza o coincidono oppure hanno intersezione vuota. Inoltre, l'unione di tutte le classi di equivalenza degli elementi di A è tutto A.

Per queste ragioni si dice che le classi di equivalenza costituiscono una *partizione* dell'insieme A, cioè costituiscono una famiglia di sottoinsiemi di A ciascuno dei quali è non vuoto. Inoltre due distinti sottoinsiemi della famiglia sono sempre disgiunti (hanno intersezione vuota) e la loro unione è tutto l'insieme.

4.8 Grafi, relazioni di equivalenza, partizioni

Sia $G = (V, L)$ un grafo non orientato, sia $v \in V$ allora l'insieme che indicheremo con C_V, di tutti i vertici $w \in V$ per i quali esiste un cammino da v a w è detto *componente connessa* di v. A volte si dice componente connessa il sottografo di G generato da C_V. Si noti che $v \in C_V$.

Se si indica con R la relazione binaria definita su V da: $\forall\, v, w \in V,\ v\,R\,w$ se esiste un cammino in G da v a w, allora R è una relazione di equivalenza su V e per ogni $v \in V$ la classe di equivalenza $[\,v\,]_R$ è esattamente C_V. Ne segue che le componenti connesse formano una *partizione* dell'insieme V ed, ovviamente, non vi è alcun lato che colleghi vertici appartenenti a componenti connesse distinte.

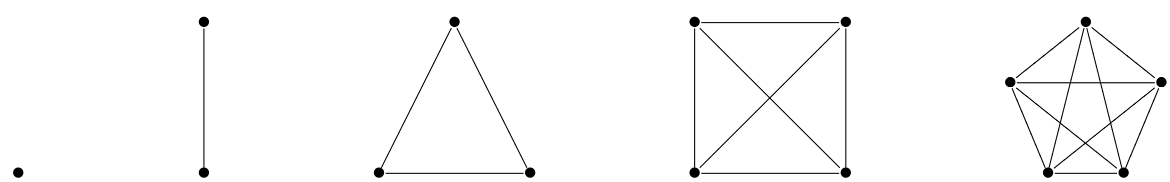
4.9 Grafi completi

Definizione

Un grafo non orientato $G = (V, L)$ si dice *completo* se tutti i suoi vertici sono a due a due adiacenti.

Ovviamente, per ogni intero naturale n, $n \geq 1$, c'è un unico grafo completo finito con n vertici, a meno di isomorfismi. Cioè, tutti i grafi completi, finiti con n vertici sono fra loro isomorfi.

Indichiamo con K_n l'unico (a meno di isomorfismi) grafo completo con n vertici. Di seguito sono riportati i diagrammi dei grafi completi K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, rispettivamente:



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

4.10 Cammini, circuiti, tracce, cicli in grafi orientati

Definizione

Un cammino orientato di lunghezza n dal vertice v al vertice w in un grafo orientato G è una successione finita $l_1 = (z_1, z_2),\ l_2 = (z_2, z_3),\ \ldots,\ l_n = (z_n, z_{n+1})$ di lati orientati di G tali che $z_1 = v$ e $z_{n+1} = w$, n è la lunghezza del cammino.

I lati del cammino si diranno *archi*.

Definizione

Un cammino in un multigrafo orientato in cui nessun arco è ripetuto si dirà una *traccia*.

Definizione

Un cammino in un multigrafo orientato in cui nessun vertice è ripetuto più di due volte è detto *sentiero*.

Terminologia

Sia G un grafo orientato o un multigrafo orientato se v, w sono vertici di G ed in G esiste un cammino che va da v a w, allora diremo che w è *raggiungibile* a partire da v. In tal caso la *distanza* di w da v è definita come la minima lunghezza dei cammini in G che vanno da v a w ed è indicata con $\mathrm{d}(v, w)$. Se non esiste alcun cammino in G che va da v a w, poniamo $\mathrm{d}(v, w) = \infty$.

Se G contiene un cammino da v a w per ogni v, w vertici di G, allora diremo che G è *connesso*. Ciò implica che il grafo non orientato G' associato al grafo orientato G, ottenuto sostituendo i lati orientati di G con lati non orientati e cancellando eventuali cappi, è connesso.

Teorema

Sia $G = (V, L, \rho)$ un multigrafo orientato e siano $x, y \in V$. Se y è raggiungibile a partire da x, allora G contiene un sentiero da x a y.

Dimostrazione

Siano $x, y \in V$, $x \neq y$ (poichè il teorema è banalmente vero se $x = y$). Sia S l'insieme dei cammini in G da x a y e, per ipotesi, sia $S \neq \emptyset$. Consideriamo l'insieme $\overline{S}$ dei numeri naturali che sono le lunghezze dei cammini in G da x a y. Per continuare la dimostrazione, ricordiamo che un insieme non vuoto A di numeri naturali ha sempre un più piccolo elemento. $\overline{S}$ ha quindi un più piccolo elemento.

Sia W un cammino da x a y in G che ha lunghezza minima. Vogliamo dimostrare che W è un sentiero da x a y.

Se non lo fosse, allora qualche vertice che compare in W dovrebbe essere ripetuto. Se fosse y il vertice ripetuto, allora W avrebbe questo aspetto: $l_1 = (x, z_2),\ l_2 = (z_2, z_3),\ ...,\ l_s = (z_s, y),\ l_{s+1} = (y, z_j),\ ...,\ l_t = (z_t, y)$.

Ma, allora, il cammino formato dai lati orientati $l_1, l_2, ..., l_s$ sarebbe un cammino da x a y di lunghezza minore di quella di W, il che contraddice la scelta di W.

Allora possiamo assumere che ci sia un altro vertice presente in W, diverso da y, ad essere ripetuto. In questo caso W avrebbe la forma: $l_1 = (x, u_1),\ l_2 = (u_1, u_2),\ ...,\ l_i = (u_{i-1}, u_i),\ l_{i+1} = (u_i, u_{i+1}),\ ...,\ l_i' = (u_j, u_i),\ l_{j+1} = (u_i, u_{j+1})\ ...,\ l_t = (u_t, y)$ ove u_i è ripetuto.

Ma, allora, il cammino $l_1 = (x, u_1),\ l_2 = (u_1, u_2),\ ...,\ l_i = (u_{i-1}, u_i),\ l_{i+1} = (u_i, u_{i+1}),\ ...,\ l_t = (u_t, y)$ è un cammino in G da x a y di lunghezza minore di quella di W. Il che contraddice ancora la scelta di W.

Teorema

Sia $G = (V, L, \rho)$ un multigrafo orientato e siano $x, y, z \in V$. Se y è raggiungibile a partire da x e z è raggiungibile a partire da y allora z è raggiungibile a partire da x ed è: $\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$.

Dimostrazione

Sia P_1 un cammino in G da x a y di lunghezza $\mathrm{d}(x, y)$ e P_2 un cammino da y a z di lunghezza $\mathrm{d}(y, z)$.

Costruiamo un cammino W da x a z costituito da P_1 seguito da P_2. Allora la lunghezza di W è $\mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$ e, per definizione, di $\mathrm{d}(x, z)$ è $\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$.

Osservazione

É chiaro che $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$ sempre. Inoltre $\mathrm{d}(x, y)$ non è, in generale, simmetrica.

Definizione

Un cammino in un multigrafo orientato da x a y è detto *aperto* se $x \neq y$, *chiuso* se $x = y$.

Definizione

Un circuito in un multigrafo orientato è un cammino chiuso.

Definizione

Un ciclo in un multigrafo orientato è un sentiero chiuso.

Teorema

Un grafo orientato o un multigrafo orientato G è connesso se e solo se G contiene un cammino chiuso che include ogni vertice di G.

Dimostrazione

Supponiamo dapprima che G sia connesso e W sia un cammino chiuso in G che include un numero massimo di vertici distinti. Dimostriamo che W include ogni vertice di G.

Se così non fosse, supponiamo che y sia un vertice di G che non è presente fra i vertici di W. Sia x un qualunque vertice presente in W. Poichè W è chiuso, W si può considerare come un cammino da x a x.

Poichè G è connesso, G contiene un cammino W_1 da x a y ed un cammino W_2 da y a x. Allora, possiamo costruire in G un cammino da x a x, W', partendo dal cammino W seguito dal cammino W_1 e poi dal cammino W_2. Ma, allora, W' include un numero di vertici distinti maggiore del cammino W in contraddizione con la scelta di W.

Viceversa sia W un cammino chiuso in G che include ogni vertice di G. Dati due vertici arbitrari di G, u, v, possiamo considerarli come vertici presenti in W e considerare quella parte di W che va da u a v come un cammino di G che va da u a v. Quindi G è connesso.

4.11 Cicli e grafi euleriani

Lemma 2

Sia $G = (V, L)$ un grafo finito, non orientato, che contiene un ciclo euleriano. Allora ogni vertice di G ha grado pari.

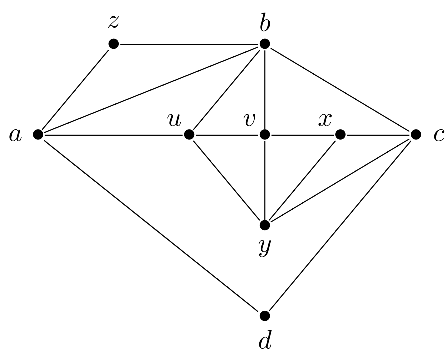
Dimostrazione

Sia $v \in V$ e consideriamo un ciclo euleriano in G. Allora v compare due volte come lato del ciclo. Quindi v ha grado pari.

Definizione

Un grafo non orientato, finito, che contiene un ciclo euleriano, si dice un *grafo euleriano.*

Esempio



è il diagramma di un grafo euleriano.

Lemma 3

Sia G un grafo finito, non orientato, tale che ogni suo vertice ha grado pari. Se v, w sono vertici adiacenti di G allora c'è in G un circuito che contiene il lato $\{v, w\}$.

Dimostrazione

Consideriamo l'insieme S dei cammini in G che iniziano con il lato $\{v, w\}$ e che non hanno lati ripetuti. S è evidentemente non vuoto. Poichè G è finito, anche l'insieme dei lati di G è finito, quindi anche S è un insieme finito.

Consideriamo l'insieme dei numeri naturali che sono le lunghezze dei cammini presenti in S. Tale insieme è finito, quindi ha un massimo elemento. Sia W un cammino in S che ha lunghezza massima. W sia, per esempio, $l_1 = \{v, w\},\ ...,\ l_n = \{z_n, z_{n+1}\}$. Affermiamo che $v = z_{n+1}$. Se così non fosse, accadrebbe che, poichè il numero dei lati di W con estremo z_{n+1} è dispari e poichè z_{n+1} ha grado pari per ipotesi, deve esserci un lato di G, diciamo $l = \{z_{n+1}, y\}$ che non compare fra gli elementi di W. Ma, allora, W si può estendere ad un cammino $W' : l_1, ..., l_n, l$ che appartiene ad S e che ha lunghezza maggiore di W, il che è una contraddizione con la scelta di W.

4.12 Un algoritmo per la determinazione di un circuito euleriano

Concludiamo il discorso sui grafi descrivendo un algoritmo per trovare un circuito euleriano in un grafo non orientato, connesso, finito, in cui ogni vertice ha grado pari. Facciamo riferimento al diagramma del grafo euleriano dell'esempio fatto in precedenza.

Passo 1 - Scegliamo un vertice di partenza, diciamo a, e costruiamo un circuito che includa ogni lato che ha estremo in a. Supponiamo di ottenere il seguente circuito $W : l_1 = \{a, u\},\ l_2 = \{u, v\},\ l_3 = \{v, x\},\ l_4 = \{x, c\},\ l_5 = \{c, d\},\ l_6 = \{d, a\},\ l_7 = \{a, b\},\ l_8 = \{b, z\},\ l_9 = \{z, a\}$

Passo 2 - Cerchiamo ora un vertice presente fra gli estremi dei lati di W che è estremo di un lato di G non presente fra i lati del circuito. Se non ce ne sono, l'algoritmo ha termine. Nel nostro caso, troviamo il vertice u.

Passo 3 - Costruiamo un ciclo che abbia inizio in u e termine in u, dentro a G, che non abbia lati in comune con il circuito costruito al passo 1. Ad esempio, W' : $l_1' = \{u, b\}$, $l_2' = \{b, x\}$, $l_3' = \{x, y\}$, $l_4' = \{y, u\}$.

Passo 4 - Sostituiamo il circuito del passo 1, partendo da u, con un circuito ottenuto giustapponendo al circuito del passo 1, in cui è stato spostato il lato l_1 al termine, il ciclo del passo 3. Nel nostro caso otteniamo il circuito: $l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9, l_1, l_1', l_2', l_3', l_4'$.

Passo 5 - Ripetiamo la ricerca, nel circuito del passo 1, del vertice che è estremo di un lato di G non presente fra gli elementi del circuito. Se non ce ne sono, l'algoritmo ha termine. Nel nostro caso, il vertice v.

Passo 6 - Costruiamo un ciclo che abbia inizio in v e termine in v, dentro a G, che non abbia lati in comune con il circuito costruito al passo 1. Nel nostro caso, W'' : $l_1'' = \{v, b\}$, $l_2'' = \{b, c\}$, $l_3'' = \{c, y\}$, $l_4'' = \{y, v\}$.

Passo 7 - Sostituiamo il circuito del passo 4 con il circuito ottenuto giustapponendo ad esso, partendo dal lato 3, il ciclo ottenuto al passo 6. Nel nostro caso otteniamo: $l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9, l_1', l_2', l_3', l_4', l_2, l_1, l_2, l_3, l_4$.

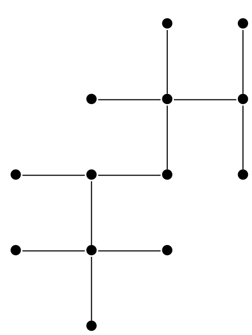
Osserviamo ora che non esiste più alcun vertice del circuito del passo 1 che sia estremo di un lato di G e non sia presente nel circuito del passo 7. Quindi, il circuito del passo 7 è euleriano. Il procedimento ha sempre termine poichè il grafo è finito.

4.13 Alberi

Definizione

Si dice *albero* un grafo od un multigrafo non orientato, connesso, privo di circuiti.

Esempio



è il diagramma di un albero finito.

Teorema

Se G è un grafo non orientato, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

a) G è un albero.

b) G è connesso, ma, se un suo lato qualunque è soppresso, il grafo risultante non è più connesso.

c) Se v, w sono vertici distinti di G, c'è esattamente un cammino in G da v a w (esiste uno ed un solo cammino in G da v a w).

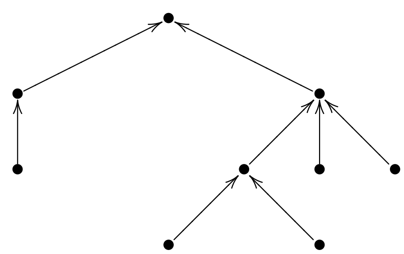
Si dà anche la nozione di *albero orientato*, che è un grafo orientato con un vertice r specificato tale che:

a) ogni vertice $v \neq r$ è il vertice iniziale di uno ed un solo arco;

b) r non è il vertice iniziale di alcun arco;

c) Per ogni vertice $v \neq r$ esiste un cammino orientato da v ad r.

Esempio



è il diagramma di un albero orientato, finito.

Capitolo 5

Matrici ad elementi reali

5.1 Concetto di matrice ad elementi reali

Le matrici ad elementi reali sono tabelle di numeri reali disposti secondo righe e colonne.

Esempio: $$A = \left\| \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ \sqrt{2} & 8 & 5 \end{array} \right\|$$

La matrice dell'esempio ha 2 righe e tre colonne e si dice una matrice 2×3.

5.2 Rappresentazione di una matrice ad elementi reali

Una generica matrice ad elementi reali si può indicare con il simbolo:

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{array} \right\| \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

oppure con il simbolo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

o, ancora, con il simbolo:

$$A = \|a_{ij}\|$$

5.3 Terminologia

I numeri a_{ij}, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$, si dicono *elementi* della matrice A: la matrice A è una matrice $m \times n$ perchè ha m righe e n colonne.

Se $m = n$, la matrice si dice *quadrata*.

Le matrici di tipo $1 \times n$ sono dette *matrici riga* o *vettori*.

Le matrici di tipo $m \times 1$ sono dette *matrici colonna*.

In una matrice quadrata $n \times n$ distinguiamo gli elementi $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ che formano la diagonale principale della matrice.

Matrice identità
Per ogni tipo di matrice quadrata $n \times n$ esiste una matrice I_n

$$I_n = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{Vmatrix}$$

detta *matrice identità*, nella quale tutti gli elementi della diagonale principale hanno valore 1 e tutti gli altri elementi hanno valore 0.

Matrice diagonale
Sia $A = \|a_{ij}\|$ una matrice quadrata $n \times n$. Se $a_{ij} = 0$ per ogni i, j con $i \neq j$, A si dirà *matrice diagonale*.

Matrice scalare
Sia $A = \|a_{ij}\|$ una matrice quadrata $n \times n$. Se $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{nn} = \lambda$ ed $a_{ij} = 0$ per ogni i, j con $i \neq j$, A si dirà *matrice scalare* (può essere $\lambda = 0$).

Matrice trasposta
Sia A una matrice $m \times n$. Si dice *trasposta della matrice* A e si indica con A^t, la matrice $n \times m$ che ha come righe le colonne di A e come colonne le righe di A.

Esempio: $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$ $\qquad A^t = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}$

Matrici uguali
Due matrici $A = \|a_{ij}\|$, $m \times n$; $B = \|b_{ij}\|$, $p \times q$ si dicono uguali se $m = p$, $n = q$ ed $a_{ij} = b_{ij}$ per ogni i, j.

5.4 Operazioni tra matrici

5.4.1 Somma di matrici

La somma è definita solo tra matrici dello stesso tipo $m \times n$ e dà come risultato una matrice $m \times n$: siano $A = \|a_{ij}\|$, $m \times n$, $B = \|b_{ij}\|$, $m \times n$, allora $A + B$ è la matrice $C = \|c_{ij}\|$, $m \times n$ con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ per ogni i, j.

Proprietà della somma di matrici

1) Se A, B, C sono matrici $m \times n$, allora $(A + B) + C = A + (B + C)$ (proprietà associativa).
2) Per ogni A, B, matrici $m \times n$, è $A + B = B + A$ (proprietà commutativa).
3) Esiste la matrice O $m \times n$ tale che $A + O = O + A = A$ per ogni matrice A $m \times n$.

$$O = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{array} \right\|$$

4) Per ogni matrice A $m \times n$ esiste la matrice $-A$ $m \times n$, ove se $A = \|a_{ij}\|$, $-A = \| - a_{ij}\|$ per ogni i, j, tale che $A + (-A) = O$.

5.4.2 Prodotto per scalare

Sia $\alpha \in \mathrm{I\!R}$, $A = \|a_{ij}\|$ una matrice $m \times n$; definiamo il prodotto di α per A nel modo seguente:

$$\alpha A \quad = \quad \alpha \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{array} \right\| \quad = \quad \left\| \begin{array}{cccc} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & ... & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & ... & \alpha a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & ... & \alpha a_{mn} \end{array} \right\|$$

Proprietà del prodotto per scalare

1) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ per ogni $\alpha \in \mathrm{I\!R}$, per ogni A, B matrici $m \times n$.
2) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathrm{I\!R}$, per ogni A matrice $m \times n$.
3) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathrm{I\!R}$, per ogni A matrice $m \times n$.
4) $1\, A = A$ per ogni A matrice $m \times n$.

Indichiamo con $M_{m,n}^{(\mathrm{I\!R})}$ l'insieme delle matrici $m \times n$ ad elementi reali. Allora la terna ($M_{m,n}^{(\mathrm{I\!R})}$, $+$, prodotto per scalare) è uno spazio vettoriale reale.

5.4.3 Prodotto righe per colonne di due matrici

É un'operazione binaria definita solo se il numero delle colonne della prima matrice è uguale al numero delle righe della seconda matrice.

Sia quindi A una matrice $m \times n$, $A = \|a_{ij}\|$; B una matrice $n \times q$, $B = \|b_{ij}\|$. Il prodotto AB è una matrice C, $C = \|c_{ij}\|$, $m \times q$ così definita:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + ... + a_{in} b_{nj}$$

Esempio

Siano $\quad A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{Vmatrix} \qquad C = AB = \begin{Vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -11 \\ -2 & 8 \end{Vmatrix}$

ove

$$\begin{array}{lcrcccccl}
c_{11} & = & 3 & = & a_{11} \cdot b_{11} & + & a_{12} \cdot b_{21} & = & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\
c_{12} & = & -5 & = & a_{11} \cdot b_{12} & + & a_{12} \cdot b_{22} & = & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \\
c_{21} & = & 1 & = & a_{21} \cdot b_{11} & + & a_{22} \cdot b_{21} & = & -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\
c_{22} & = & -11 & = & a_{21} \cdot b_{12} & + & a_{22} \cdot b_{22} & = & -1 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) \\
c_{31} & = & 1 & = & a_{31} \cdot b_{11} & + & a_{32} \cdot b_{21} & = & 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 \\
c_{32} & = & -11 & = & a_{31} \cdot b_{12} & + & a_{32} \cdot b_{22} & = & 0 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4)
\end{array}$$

Proprietà del prodotto tra matrici

Quando scriveremo AB supporremo che il prodotto della matrice A per la matrice B sia definito, cioè che il numero delle colonne di A sia uguale al numero delle righe di B.

1) $A(BC) = (AB)C$; A, B, C matrici;
2) $A(B + C) = AB + AC$; A, B, C matrici;
3) $(A + B)C = AC + BC$; A, B, C matrici;
4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B$; $\alpha \in \mathbb{R}$; A, B matrici;

Si noti bene che:

1) il prodotto di due matrici A, B cioè AB può essere definito, mentre può non essere definito il prodotto BA;
2) date due matrici A, B possono essere definiti i prodotti AB e BA, ma, in generale, è $AB \neq BA$;
3) esistono matrici A, B diverse dalla matrice O tali che il prodotto AB è definito ed $AB = O$.

   Ad esempio $\quad A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad A \neq O,\ B \neq O,$

   ma AB (che è definito) risulta essere la matrice O.

5.4.4 Matrici trasposte

Consideriamo una matrice A $m \times n$ e la sua trasposta A^t, allora AA^t è definito e $(AA^t)^t = AA^t$, inoltre:

1) $(A + B)^t = A^t + B^t$; A, B matrici $m \times n$;
2) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$; $\lambda \in \mathbb{R}$; A matrice $m \times n$;
3) $(AB)^t = B^t A^t$; A, B matrici per le quali il prodotto AB è definito;

5.4.5 Matrici simmetriche

Sia data una matrice $A = \|a_{ij}\|$. A si dice simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j. Se A è una matrice simmetrica, allora $A = A^t$. Viceversa, se $A = A^t$, A è simmetrica.

É facile osservare che, se la matrice A è simmetrica, allora è anche quadrata e si dice simmetrica rispetto alla diagonale principale.

Teorema
Se A è una matrice simmetrica e B è una matrice tale che i prodotti BA e AB^t siano definiti, allora il prodotto BAB^t è una matrice simmetrica.

Dimostrazione
Sia $C = BAB^t$. Consideriamo $C^t = (BAB^t)^t = (B^t)^t A^t B^t = BAB^t$, poichè $(B^t)^t = B$ e $A^t = A$ per ipotesi.

5.4.6 Traccia di una matrice quadrata

Sia A una matrice quadrata $n \times n$, diremo traccia di A e la indicheremo con $\mathrm{tr}(A)$ la somma degli elementi della diagonale principale di A.

Proprietà della traccia

1) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$; A, B matrici $n \times n$;
2) $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A)$; $\lambda \in \mathbb{R}$, A matrice $n \times n$;

5.5 Determinante di una matrice

Il determinante è una funzione che associa ad ogni matrice quadrata un numero reale. Indicheremo il determinante della matrice $A = \|a_{ij}\|$ $n \times n$ con $\det(A)$ o con

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Se A è una matrice 1×1, $A = \|a_{11}\|$ porremo $\det(A) = a_{11}$.

Fattoriale
Sia n un intero naturale, $n \in \mathbb{N}$: diremo fattoriale di n e scriveremo $n!$ il prodotto dei primi n numeri naturali cominciando da 1. $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1$. Porremo $0! = 1$.

Il valore del determinante di una matrice $n \times n$ è definito come la somma di $n!$ termini della forma $(-1)^k \cdot a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot ... \cdot a_{ni_n}$. Ciascun termine contiene uno ed un solo elemento per ciascuna riga ed uno ed un solo elemento per ciascuna colonna; vale a dire che i secondi indici $i_1, i_2, ..., i_n$ sono uguali a $1, 2, ..., n$

presi in un qualche ordine (si tratta delle loro possibili permutazioni). L'esponente k rappresenta il numero di scambi di due elementi necessari affinchè i secondi indici siano posti in ordine crescente.

Consideriamo ad esempio il termine contenente $a_{13}, a_{21}, a_{34}, a_{42}$ nella valutazione del determinante di una matrice 4×4. Il valore di k è, in questo caso, 3 poichè sono necessari tre scambi di due elementi affinchè i secondi indici siano posti nell'ordine $1, 2, 3, 4$:

$$a_{13}, a_{21}, a_{34}, a_{42} : \qquad a_{21}, a_{13}, a_{34}, a_{42} \longrightarrow a_{21}, a_{13}, a_{42}, a_{34} \longrightarrow a_{21}, a_{42}, a_{13}, a_{34}$$

quindi, il termine contenente il fattore $a_{13}, a_{21}, a_{34}, a_{42}$ ha il fattore addizionale $(-1)^3$ cioè -1.

Se A è una matrice 2×2, allora il calcolo porta a dire che $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

In altre parole, sia $A = \|a_{ij}\|$ una matrice quadrata $n \times n$, sia $N = \{1, 2, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$, l'insieme dei primi n numeri naturali, sia P_N l'insieme delle $n!$ permutazioni di N.

Una permutazione può essere pari o dispari. Per calcolare il segno di una permutazione si può calcolare il numero delle coppie ordinate (i, k) all'interno della permutazione per cui sia $i > k$. Se questo numero è pari, la permutazione è pari, altrimenti è dispari. Sia dunque $\sigma_n = 1$ se l'ennesima permutazione in P_N è pari, altrimenti sia $\sigma_n = -1$.

$$\det(A) = \sum_{p \in P_N} \sigma_n \cdot a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot ... \cdot a_{np_n}$$

Esempio

Consideriamo la seguente matrice 3×3:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 6 \end{Vmatrix}$$

Le possibili permutazioni di questa matrice sono $3! = 6$: $P_N = \{(1,2,3),(1,3,2),(3,1,2),(3,2,1),(2,3,1),(2,1,3)\}$. I segni delle permutazioni sono rispettivamente $+, -, +, -, +, -$, quindi

$$\det(A) = +1 \cdot 5 \cdot 6 - 1 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 7 - 2 \cdot 6 \cdot 6 = 21$$

5.5.1 Minore associato ad un elemento di una matrice

Sia $A = \|a_{ij}\|$ una matrice $n \times n$. Si dice *minore* associato all'elemento a_{ij} di A e si indica con A_{ij} la matrice che si ottiene sopprimendo nella matrice A la i-esima riga e la j-esima colonna.

Esempio

Sia $A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$ il minore associato ad a_{23} è $A_{23} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{Vmatrix}$

5.5.2 Complemento algebrico o cofattore di un elemento di una matrice

Data la matrice $A = \|a_{ij}\|$ $n \times n$, considerato l'elemento a_{ij} di essa, si dice *complemento algebrico* o *cofattore* di a_{ij} il determinante del minore associato all'elemento a_{ij} moltiplicato per $(-1)^{i+j}$.

Nell'esempio precedente, il cofattore di a_{23} è $(-1)^{2+3}\det(A_{23}) = -\det(A_{23})$.

Sia ora A una matrice $n \times n$, consideriamo una riga di A e costruiamo la quantità ottenuta sommando i prodotti degli elementi della riga per i loro cofattori. Questa quantità non varia al variare della riga o della colonna della matrice ed è il determinante della matrice A.

Evidentemente, nel calcolo del determinante di una matrice $n \times n$ entra il calcolo del determinante dei minori associati agli elementi, che sono matrici $(n-1 \times n-1)$. Per il calcolo di questi ultimi si itera il procedimento visto per il calcolo del determinante di una matrice $n \times n$ e così di seguito finchè si arriva al calcolo del determinante di matrici 2×2.

5.5.3 Proprietà del determinante

Le proprietà seguenti sono valide, con le opportune modifiche, per i determinanti delle matrici $n \times n$. Noi le daremo solo per le matrici 2×2 ed in tal caso la loro dimostrazione è immediata.

a) $\det(I_2) = \det\left(\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|\right) = 1$

b) Sia $A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|$, $\quad B = \left\| \begin{matrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|$, $\quad C = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{matrix} \right\|$, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$;

allora $\det(B) = \det(C) = \lambda\det(A)$.

c) Sia $A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|$, $\quad B = \left\| \begin{matrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|$, $\quad C = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{matrix} \right\|$, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$;

allora $\det(B) = \det(C) = \lambda\det(A)$.

d) $\det(\lambda A) = \lambda^2\det(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $A_{2\times 2}$.

e) Sia $A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|$, $\quad B = \left\| \begin{matrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+a_{22} & a_{22} \end{matrix} \right\|$, $\quad C = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12}+a_{11} \\ a_{21} & a_{22}+a_{21} \end{matrix} \right\|$,

allora $\det(B) = \det(C) = \det(A)$.

f) Sia $A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|$, $\quad B = \left\| \begin{matrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|$, $\quad C = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+a_{11} & a_{22}+a_{12} \end{matrix} \right\|$,

allora $\det(B) = \det(C) = \det(A)$.

g) Se una matrice A ha una riga o una colonna di tutti zeri, allora il suo determinante è 0.

h) Il valore del determinante non cambia se si scambiano le righe con le colonne, cioè $\det(A) = \det(A^t)$. Questa proprietà è importante perchè ci dice che per ogni proprietà concernente le righe nel calcolo del determinante esiste un'analoga proprietà concernente le colonne.

i) Se si scambiano due righe di un determinante, allora il determinante cambia segno.
Se si scambiano due colonne di un determinante, allora il determinante cambia segno.

j) Siano A, B matrici $n \times n$, allora $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Osservazione

In generale, date A, B matrici $n \times n$, è $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

5.5.4 Regola di Sarrus per il calcolo del determinante di una matrice 3×3

La regola di Sarrus vale solo per le matrici 3×3.

Sia data una matrice $A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$

Il calcolo dovrà essere effettuato seguendo lo schema:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

dove le prime due colonne sono ripetute a destra dell'ultima.

I prodotti dei tre elementi lungo le frecce che vanno dall'alto al basso verso destra mantengono il segno, mentre i prodotti dei tre elementi lungo le frecce che vanno dal basso all'alto verso destra cambiano il segno. La somma algebrica dei 6 prodotti è il valore del determinante:

$$\det(A) = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{31}\, a_{22}\, a_{13} - a_{32}\, a_{23}\, a_{11} - a_{33}\, a_{21}\, a_{12}$$

5.5.5 Esempio di calcolo del determinante mediante la regola di Sarrus

Sia $\quad A = \begin{Vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{Vmatrix} \quad$ utilizzando lo schema: $\quad \begin{matrix} 0 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & -1 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 3 & 5 & 1 \end{matrix}$

si ottiene $\quad \det(A) = 0 - 20 + 8 + 20 - 0 - 48 = -40.$

5.5.6 Esempio di calcolo del determinante mediante cofattori

Sia $\quad A = \begin{Vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$

É evidente che nel calcolo del determinante mediante cofattori conviene, per semplificare i calcoli, scegliere una riga o una colonna della matrice che presenti il maggior numero di zeri fra i suoi elementi.

Nel nostro caso conviene scegliere la prima colonna o la seconda riga. Scegliamo la prima colonna:

non è necessario calcolare il cofattore di a_{11} poichè, essendo $a_{11} = 0$, anche il suo cofattore sarà necessariamente 0;

calcoliamo il cofattore di a_{21} che è

$$(-1)^{2+1} \cdot \det\left(\begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}\right) = -\det\left(\begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}\right) = -(12 - 2) = -10$$

calcoliamo il cofattore di a_{31} che è

$$(-1)^{3+1} \cdot \det\left(\left\| \begin{array}{cc} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{array} \right\|\right) = \det\left(\left\| \begin{array}{cc} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{array} \right\|\right) = -4+4=0$$

quindi

$$\det(A) = 4 \cdot (-10) + 5 \cdot 0 = -40.$$

5.5.7 Prodotto vettoriale con il determinante

Consideriamo i vettori di $\mathbb{R}^3$ $\underline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\underline{b} = (x_2, y_2, z_2)$; siano $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ i versori degli assi in $\mathbb{R}^3$.

Se indichiamo i vettori come $\underline{a} = x_1\underline{i} + y_1\underline{j} + z_1\underline{k}$ e $\underline{b} = x_2\underline{i} + y_2\underline{j} + z_2\underline{k}$, sappiamo che

$$\underline{a} \times \underline{b} \;=\; (x_1\underline{i} + y_1\underline{j} + z_1\underline{k}) \times (x_2\underline{i} + y_2\underline{j} + z_2\underline{k}) \;=\; (y_1z_2 - y_2z_1)\underline{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\underline{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\underline{k}$$

Esprimendo ciascuna delle componenti del prodotto vettoriale come determinante del secondo ordine, avremo:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \left(\left| \begin{array}{cc} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array} \right| \right)$$

ovvero:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \left| \begin{array}{cc} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{array} \right| \underline{i} + \left| \begin{array}{cc} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{array} \right| \underline{j} + \left| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array} \right| \underline{k}$$

da ciò risulta evidente che il prodotto vettoriale $\underline{a} \times \underline{b}$ può essere espresso come segue

$$\underline{a} \times \underline{b} = \det\left(\left\| \begin{array}{ccc} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{array} \right\|\right)$$

5.5.8 Prodotti scalari e vettoriali in $\mathbb{R}^3$ con il determinante

Consideriamo i vettori di $\mathbb{R}^3$ $\underline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\underline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\underline{c} = (x_3, y_3, z_3)$, allora

$$\underline{a}(\underline{b} \times \underline{c}) = \det\left(\left\| \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{array} \right\|\right)$$

5.5.9 Matrici singolari e non singolari

Sia A una matrice quadrata, se $\det(A) \neq 0$ la matrice si dice *non singolare*, altrimenti si dice *singolare*.

5.5.10 Matrice inversa di una matrice non singolare

Sia $A = \|a_{ij}\|$ una matrice quadrata $n \times n$, non singolare. Diremo *matrice inversa di* A e la indicheremo con A^{-1} la matrice quadrata $n \times n$ tale che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Vediamo ora come si calcolano gli elementi della matrice inversa di una matrice quadrata $A = \|a_{ij}\|$, $n \times n$, non singolare.

1) per ogni elemento a_{ij} di A si calcola il suo cofattore, che indichiamo con c_{ij}.
2) si considera la matrice $n \times n$ che ha come elementi i c_{ij} calcolati in precedenza (*matrice dei cofattori*). Indichiamo questa matrice con il simbolo A^*.
3) si calcola $(A^*)^t$ (*matrice aggiunta*).

Allora $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(A^*)^t$$

e risulta $$\det(A^{-1}A) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1 = \det(A^{-1}) \cdot \det(A)$$

onde $$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Osservazione
Vale la regola che, se $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$, allora $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

5.6 Rango di una matrice

5.6.1 Rango per righe e per colonne

Sia data una generica matrice A $m \times n$; ciascuna delle sue righe si può vedere come un vettore ad n componenti, quindi come un elemento di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo il sottospazio vettoriale generato da questi vettori: la sua dimensione si chiamerà *rango per righe* della matrice A.

Esempio
Sia $$A = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 9 & 3 \end{Vmatrix}$$

Consideriamo i vettori $(0,2,3,1)$, $(0,4,6,2)$, $(0,6,9,3)$ ed il sottospazio da essi generato in $\mathbb{R}^4$. Sia T questo sottospazio; è facile vedere che $\{(0,2,3,1)\}$ è una base di T, quindi $\dim_{\mathbb{R}} T = 1$ ed il rango per righe della matrice A è 1.

Analogamente, consideriamo le colonne della generica matrice A $m \times n$: ciascuna colonna si può vedere come una matrice $m \times 1$ e queste matrici generano un sottospazio vettoriale $M_{m,1}^{(\mathbb{R})}$. La sua dimensione viene detta *rango per colonne* della matrice A.

Teorema
Per ogni matrice A $m \times n$, il rango per righe di A coincide con il rango per colonne di A.

Questo numero comune prende il nome di *rango della matrice A*.

5.6.2 Esempi di ricerca del rango di matrici

Esempio 1

Consideriamo la matrice 2×3 $A = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{matrix} \right\|$.

Lo spazio delle righe della matrice A è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ $T = <(1,2,3),\ (-4,0,5)>$. Evidenziamo una base di T per trovarne la dimensione.

É facile vedere che per nessuno scalare λ è $(-4,0,5) = \lambda(1,2,3)$; onde i due vettori di $\mathbb{R}^3 :\ (1,2,3), (-4,0,5)$ sono linearmente indipendenti e, poichè generano T, formano una base di T. Quindi $\dim_{\mathbb{R}} T = 2$ ed il rango della matrice A è 2.

Esempio 2

Consideriamo la matrice 3×4 $A = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|$.

Con procedimento analogo a quello dell'esempio 1 è possibile determinare che il rango della matrice è 3.

Esempio 3

Consideriamo la matrice 3×4 $A = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right\|$.

Con procedimento analogo a quello dell'esempio 1 è possibile determinare che il rango della matrice è 2.

5.6.3 Operazioni sulle righe di una matrice e suo rango

Esistono tre tipi di operazioni sulle righe di una matrice che non ne fanno mutare il rango:

1) moltiplicazione o divisione degli elementi di una riga della matrice per uno scalare $\lambda \neq 0$;

2) sostituzione di una riga con quella ottenuta mediante la somma di essa con un multiplo non nullo di un'altra riga;

3) scambio di due righe.

Queste operazioni, opportunamente e ripetutamente applicate alle righe di una matrice A $m \times n$, permettono di arrivare, dopo una serie finita di passaggi, ad una matrice A' che ha una forma del tipo:

$$A' = \left\| \begin{matrix} I_p & D \\ O_1 & O_2 \end{matrix} \right\|$$

Ove I_p è la matrice identità $p \times p$, D è una matrice $p \times (n-p)$, O_1, O_2 due matrici nulle.

A questo punto, si legge facilmente il rango di A' che è p; quindi, anche il rango di A è p, poichè A' è stata ricavata da A attraverso successive applicazioni delle tre operazioni che non mutano il rango della matrice.

Se $p = m$, allora A si trasforma in una matrice A' del tipo:

$$A' = \begin{Vmatrix} I_m & D \end{Vmatrix}$$

Se $p = n$, allora A si trasforma in una matrice A' del tipo:

$$A' = \begin{Vmatrix} I_m \\ O \end{Vmatrix}$$

Esempio

Sia data la matrice $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$.

• Moltiplichiamo per -2 la prima riga di A e sommiamola alla seconda; otteniamo la matrice

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$$

• Dividiamo per -5 la seconda riga di A_1; otteniamo la matrice

$$A_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$$

• Moltiplichiamo per -3 la prima riga di A_2 e sommiamola alla terza; otteniamo la matrice

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{Vmatrix}$$

• Moltiplichiamo per -2 la seconda riga di A_3 e sommiamola alla prima; otteniamo la matrice

$$A_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{Vmatrix}$$

• Moltiplichiamo per 6 la seconda riga di A_4 e sommiamola alla terza; otteniamo la matrice

$$A_5 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{Vmatrix}$$

• Dividiamo per -4 la terza riga di A_5; otteniamo la matrice

$$A_6 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

• Moltiplichiamo per -1 la terza riga di A_6 e sommiamola alla prima; otteniamo la matrice

$$A_7 = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right\|$$

• Moltiplichiamo per -1 la terza riga di A_7 e sommiamola alla seconda; otteniamo la matrice

$$A' = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right\|$$

La matrice A' ha la forma $\left\| \begin{array}{cc} I_r & D \end{array} \right\|$, ove $I_r = I_3$ e D è la matrice colonna $\left\| \begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ 3 \end{array} \right\|$.

Quindi il rango di A è 3.

5.6.4 Proprietà del rango

a) Per ogni matrice A $m \times n$ è $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^t)$.

b) Per ogni matrice A $m \times n$ è $\text{rango}(A) \leq m$ e $\text{rango}(A) \leq n$,

onde $\text{rango}(A) \leq \min\{m, n\}$.

c) Siano date due matrici A, B tali che il prodotto AB sia definito, allora è

$\text{rango}(AB) \leq \text{rango}(A) \quad \text{e} \quad \text{rango}(AB) \leq \text{rango}(B)$

onde $\text{rango}(AB) \leq \min\{\text{rango}(A), \text{rango}(B)\}$.

d) Siano date due matrici A, B tali che il prodotto AB sia definito ed A sia non singolare (quindi A è quadrata e $\det(A) \neq 0$); poichè A è non singolare, esiste l'inversa A^{-1} e risulta

$A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = IB = B$

ove I è la matrice identità di tipo opportuno.

Allora $\text{rango}(A^{-1}(AB)) = \text{rango}(B)$ quindi $\text{rango}(AB) = \text{rango}(B)$.

e) Sia data una matrice A di rango r, allora ogni sottoinsieme della matrice A ha rango minore o uguale ad r, ove per sottoinsieme di A si intende la matrice ottenuta da A sopprimendo righe e/o colonne.

f) Sia data una matrice A di rango r, allora esiste almeno una sottomatrice quadrata $r \times r$ di A che ha rango r.

5.7 Sistemi di equazioni lineari

Sia dato il sistema di equazioni

$$\left\{ \begin{array}{lllllllll} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & ... & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & ... & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ ... & + & ... & + & ... & + & ... & = & ... \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & ... & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

In un sistema di m equazioni nelle incognite $x_1, ..., x_n$, gli a_{ij} si dicono *coefficienti* ed i numeri $b_1, ..., b_m$ termini noti. Le equazioni che formano il sistema, si dicono lineari perchè le incognite compaiono al primo grado e non compaiono prodotti fra incognite, cioè termini del tipo $x_{i1} \cdot x_{i2} \cdot ... \cdot x_{ir}$

5.7.1 Regola di Cramer

Sia dato un sistema di n equazioni lineari nelle n incognite $x_1, ..., x_n$:

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & ... & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & ... & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ ... & + & ... & + & ... & + & ... & = & ... \\ a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + & ... & + & a_{nn}\,x_n & = & b_n \end{cases}$$

A questo sistema sono associate tre matrici:

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{matrix} \right\|, \qquad X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{matrix} \right\|, \qquad B = \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{matrix} \right\|$$

Il sistema (1) si può scrivere nella forma di una equazione matriciale di primo grado:

$$AX = B$$

Supponiamo che $\det(A) \neq 0$. Allora il sistema (1) ammette una ed una sola soluzione data da:

$$x_1 = \frac{\det\left(\left\| \begin{matrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{matrix} \right\|\right)}{\det(A)}, \qquad x_2 = \frac{\det\left(\left\| \begin{matrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & b_n & ... & a_{nn} \end{matrix} \right\|\right)}{\det(A)},$$

$$..., \qquad x_n = \frac{\det\left(\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n \end{matrix} \right\|\right)}{\det(A)},$$

Esempio
Sia dato il sistema lineare di tre equazioni nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ -x + 2y - z = 0 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è $\quad A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix} \right\| \quad$ e $\quad \det(A) = -2.$

La matrice dei termini noti è $B = \begin{Vmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}$, quindi la soluzione del sistema è data da:

$$x = \frac{\det\left(\begin{Vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}\right)}{-2}, \quad y = \frac{\det\left(\begin{Vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{Vmatrix}\right)}{-2}, \quad z = \frac{\det\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}\right)}{-2}$$

La soluzione del sistema è la terna $(1, 2, 3)$.

5.7.2 Teorema di Rauchè-Capelli

Sia dato un sistema di m equazioni lineari nelle n incognite $x_1, ..., x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & ... & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & ... & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ ... & + & ... & + & ... & + & ... & = & ... \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & ... & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{cases}$$

A questo sistema sono associate le seguenti matrici:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad \text{matrice dei coefficienti}$$

$$B = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix} \qquad \text{matrice dei coefficienti e termini noti}$$

Il teorema di Rauchè-Capelli afferma che il sistema ammette almeno una soluzione se il rango di A è uguale al rango di B.

Esempio
Sia dato il seguente sistema di quattro equazioni nelle tre incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \\ y - z = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \qquad \text{risulta} \qquad A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$$

Facendo i calcoli si trova che $\text{rango}(A) = \text{rango}(B) = 2$. Quindi il sistema ammette almeno una soluzione. Vediamo come procedere per trovare le soluzioni del sistema dato.

a) Poichè la matrice A ha rango 2, esiste almeno una sua sottomatrice 2×2 che ha rango 2. Sia essa, per esempio, la sottomatrice $A' = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|$ ottenuta sopprimendo in A la terza riga, la quarta riga e l'ultima colonna. Osserviamo che anche la sottomatrice $A'' = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix} \right\|$ ha rango 2.

b) La sottomatrice A' può essere considerata come la matrice dei coefficienti del sistema di equazioni lineari nelle incognite x, y, z $\begin{cases} x + y = 2 - z \\ x = 1 - 2z \end{cases}$ considerando la terza incognita come un termine noto.

Il sistema trovato in (b) è un sistema a cui si può applicare la regola di Cramer in quanto formato da due equazioni in tre incognite e $\det A' \neq 0$ poichè A' è 2×2 ed ha rango 2.

Quindi:

$$x = \frac{\det\left(\left\| \begin{matrix} 2-z & 1 \\ 1-2z & 0 \end{matrix} \right\|\right)}{\det(A')}, \qquad y = \frac{\det\left(\left\| \begin{matrix} 1 & 2-z \\ 1 & 1-2z \end{matrix} \right\|\right)}{\det(A')}, \qquad \det(A') = -1$$

$$x = \frac{2z-1}{-1}, \qquad y = \frac{1-2z-(2-z)}{-1} \qquad \text{cioè} \qquad x = 1-2z, \qquad y = z+1$$

Quindi, il sistema di partenza ammette infinite soluzioni date dalle terne $(1-2z, z+1, z)$ al variare di z in $\mathbb{R}$.

5.7.3 Sistemi omogenei di equazioni lineari

Se in un sistema lineare di m equazioni in n incognite i termini noti $b_1, ..., b_n$ sono tutti uguali a 0, il sistema di dice *omogeneo*.

Ogni sistema di m equazioni lineari in n incognite, omogeneo ammette almeno la soluzione formata dalla n-upla di tutti zero.

Dato un sistema omogeneo di m equazioni lineari in n incognite, se la n-upla $(0, 0, ..., 0)$ non è l'unica soluzione, allora il sistema ammette infinite soluzioni poichè, se la n-upla $(a_1, ..., a_n)$ è una soluzione, lo è anche ogni n-upla del tipo $(\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite abbia soluzioni non nulle è che il rango della matrice dei coefficienti sia minore di n.

Teorema

Un sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite ammette soluzioni non nulle se e soltanto se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo.

Nota

Si osserverà che, a seguito di una delle proprietà del rango, l'ultimo teorema è semplicemente una riformulazione di quello precedente.

5.8 Autovalori, autovettori e autospazi di una matrice quadrata

Autovalori e autovettori: caso geometrico

Consideriamo una matrice 2×2 $A = \|a_{ij}\|$. Se il piano Π della geometria euclidea è dotato di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, allora ad ogni punto P del piano sono associate univocamente due coordinate (x, y).

Possiamo mettere in corrispondenza ogni punto $P \neq (0,0)$ del piano Π, di coordinate (x, y) con la matrice colonna $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}$. Moltiplicando la matrice A per $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}$, otteniamo la matrice colonna $\begin{Vmatrix} a_{11}\,x + a_{12}\,y \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y \end{Vmatrix}$ alla quale possiamo associare un punto P' del piano Π di coordinate $(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)$.

Abbiamo così definito, tramite moltiplicazione per la matrice A una corrispondenza $(P \to P')$ tra i punti del piano Π.

Se il punto P' sta sulla retta passante per l'origine ed il punto P, allora le coordinate di P' si ottengono da quelle di P moltiplicandole per un opportuno scalare λ $(P' = \lambda P)$ e possiamo scrivere in simboli $AP = \lambda P = P'$.

Lo scalare λ si dirà *autovalore della matrice* A ed il vettore (x, y) formato dalle coordinate del punto P *autovettore della matrice* A.

Autovalori e autovettori: caso algebrico

Sia A una matrice quadrata $n \times n$, X una matrice colonna $\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{Vmatrix}$ e consideriamo l'equazione:

$$AX = \lambda X \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

In questa equazione ci sono due incognite: λ e X. Osserviamo che, se si prende la matrice colonna di tutti zero, allora l'equazione in una incognita λ

$$A \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{Vmatrix} = \lambda \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{Vmatrix}$$

è sempre verificata quale che sia λ, quindi, escludiamo il caso della matrice colonna di tutti zero dalle nostre considerazioni.

Riprendiamo in esame l'equazione nelle due incognite

$$AX = \lambda X \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Diremo che λ è un autovalore della matrice A se esiste un X che soddisfa l'equazione. Dato λ, ogni $X \neq O$ che soddisfa l'equazione si dirà *autovettore della matrice* A *relativo all'autovalore* λ.

5.8.1 Calcolo degli autovalori e degli autovettori di una matrice data

Sia A una data matrice $n \times n$. Sia λ un suo autovalore e V un suo autovettore relativo all'autovalore λ. É allora:

$$AV = \lambda V$$

cioè $AV - \lambda V = 0$ cioè $(A - \lambda I)V = 0$ ove I è la matrice identità $n \times n$.

$$\text{Se} \quad A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{matrix} \right\| \qquad \text{allora} \qquad A - \lambda I = \left\| \begin{matrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{matrix} \right\|$$

e la relazione $(A - \lambda I) = 0$ si può scrivere come un sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\, v_1 & + & a_{12}\, v_2 & + & ... & + & a_{1n}\, v_n & = & 0 \\ a_{21}\, v_1 & + & (a_{22} - \lambda)\, v_2 & + & ... & + & a_{2n}\, v_n & = & 0 \\ ... & + & ... & + & ... & + & ... & = & ... \\ a_{n1}\, v_1 & + & a_{n2}\, v_2 & + & ... & + & (a_{nn} - \lambda)\, v_n & = & 0 \end{cases}$$

Poichè questo sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione non nulla: $(v_1, ..., v_n)$ allora deve essere $\det(A - \lambda I) = 0$ cioè la matrice $A - \lambda I$ deve avere rango minore di n.

Equazione caratteristica della matrice A

Ora procediamo al contrario e consideriamo il sistema lineare omogeneo, data la matrice $A = \|a_{ij}\|$ $n \times n$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\, x_1 & + & a_{12}\, x_2 & + & ... & + & a_{1n}\, x_n & = & 0 \\ a_{21}\, x_1 & + & (a_{22} - \lambda)\, x_2 & + & ... & + & a_{2n}\, x_n & = & 0 \\ ... & + & ... & + & ... & + & ... & = & ... \\ a_{n1}\, x_1 & + & a_{n2}\, x_2 & + & ... & + & (a_{nn} - \lambda)\, x_n & = & 0 \end{cases}$$

che equivale all'equazione matriciale $(A - \lambda I) = 0$. Questo sistema ammette almeno una soluzione non nulla se $\det(A - \lambda I) = 0$.

Consideriamo l'equazione in λ:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

questa equazione di grado n è detta *equazione caratteristica della matrice A*. Le sue soluzioni sono gli autovalori della matrice A.

Per ogni sua soluzione λ_1, consideriamo l'equazione matriciale

$$(A - \lambda_1 I)X = O \qquad \text{ove} \qquad X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{matrix} \right\|$$

Ogni soluzione di questa equazione matriciale, diversa dalla soluzione nulla, è detta *autovettore della matrice A relativo all'autovalore λ_1*.

Autospazio della matrice A

La totalità degli autovettori della matrice A con il vettore $\underline{0}$ forma un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ detto *autospazio della matrice A relativo all'autovalore* λ_1. Quindi, ogni combinazione lineare di autovettori della matrice A relativi allo stesso autovalore λ_1 è ancora un autovettore della matrice A relativo allo stesso autovalore λ_1.

Osserviamo che l'equazione matriciale $(A - \lambda_1 I)X = O$ corrisponde ad un sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)\, x_1 & + & a_{12}\, x_2 & + & ... & + & a_{1n}\, x_n & = & 0 \\ a_{21}\, x_1 & + & (a_{22} - \lambda_1)\, x_2 & + & ... & + & a_{2n}\, x_n & = & 0 \\ ... & + & ... & + & ... & + & ... & = & ... \\ a_{n1}\, x_1 & + & a_{n2}\, x_2 & + & ... & + & (a_{nn} - \lambda_1)\, x_n & = & 0 \end{cases}$$

5.8.2 Esempi di ricerca di autovalori ed autospazi

Esempio 1

Sia data la matrice $\quad A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$

Impostiamo l'equazione caratteristica della matrice A:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad \text{(equazione in } \lambda)$$

cioè

$$\det\left(\begin{Vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{Vmatrix}\right) = 0$$

ossia

$$(1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

Le soluzioni di questa equazione sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$. Dunque $-1, 3$ sono gli autovalori della matrice A.

Per ogni autovalore di A cerchiamo ora gli autovettori relativi.

- Consideriamo anzitutto l'autovalore λ_1:

$$(A - (-1)I_2)X = 0$$

$$\text{cioè} \quad \begin{Vmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 2 & 1-(-1) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \qquad \text{ossia} \quad \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

che equivale al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

che equivale all'equazione $x_1 + x_2 = 0$ cioè $x_1 = -x_2$.

Quindi gli autovettori di A relativi all'autovalore $\lambda_1 = -1$ formano l'insieme:

$\{ (-x_2, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R} - \{0\} \}$

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = -1$ è

$\{ (-x_2, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R} - \{0\} \} \cup \{\underline{0}\}$

Una base dell'autospazio è $\{ (-1, 1) \}$, quindi esso ha dimensione 1.

- Consideriamo ora l'autovalore λ_2:

$$(A - 3I_2)X = 0$$

$$\text{cioè} \quad \left\| \begin{matrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \qquad \text{ossia} \quad \left\| \begin{matrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

che equivale al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

che equivale all'equazione $x_1 - x_2 = 0$ cioè $x_1 = x_2$.

Quindi gli autovettori di A relativi all'autovalore $\lambda_2 = 3$ formano l'insieme:

$\{ (x_1, x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R} - \{0\} \}$

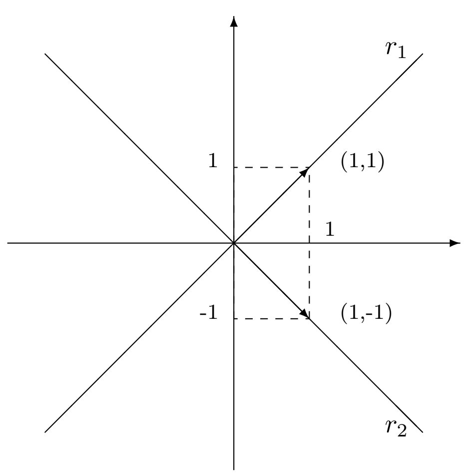
L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$ è

$\{ (x_1, x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R} - \{0\} \} \cup \{\underline{0}\}$

Una base dell'autospazio è $\{ (1, 1) \}$, quindi esso ha dimensione 1.

Interpretazione geometrica dei risultati

In base ai risultati, possiamo dare un'interpretazione geometrica degli autovettori della matrice A: essi sono vettori del piano che escono dall'origine e sono disposti sulle due bisettrici degli assi cartesiani ortogonali:



Esempio 2

Sia data la matrice $\left\| \begin{array}{rr} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|$

Impostiamo l'equazione caratteristica della matrice A:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad \text{(equazione in } \lambda\text{)}$$

cioè

$$\det\left(\left\| \begin{array}{rr} 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1-\lambda \end{array} \right\| \right) = 0$$

ossia

$$(1-\lambda)^2 = 0$$

Le soluzioni di questa equazione coincidono: $\lambda_1 = 1$ (si dice che la soluzione $\lambda_1 = 1$ ha molteplicità algebrica 2). Dunque 1 è è l'autovalore della matrice A.

Calcoliamo ora gli autovettori relativi all'autovalore 1 di A di molteplicità algebrica 2.

$$(A - 1I_2)X = 0$$

cioè $\left\| \begin{array}{cc} 1-1 & -2 \\ 0 & 1-1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\|$ ossia $\left\| \begin{array}{rr} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\|$

che equivale al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 0x_1 - 2x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione del sistema è soddisfatta per ogni x_1 e per ogni x_2. La prima equazione è soddisfatta per ogni x_1 e per $x_2 = 0$.

Quindi gli autovettori di A relativi all'autovalore $\lambda_1 = 1$ formano l'insieme:

$\{ \ (x_1, 0) \ \mid \ x_1 \in \mathbb{R} - \{0\} \ \}$

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$ è

$\{ \ (x_1, 0) \ \mid \ x_1 \in \mathbb{R} - \{0\} \ \} \cup \{\underline{0}\}$

Una base dell'autospazio è $\{ \ (1, 0) \ \}$, quindi esso ha dimensione 1.

Gli autovettori di A, nell'interpretazione geometrica, sono situati sull'asse x.

5.8.3 Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore

Un autovalore λ_1 relativo ad una matrice A $n \times n$ è una soluzione di una equazione di grado n in λ: $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Se è una soluzione semplice, allora il polinomio $\lambda - \lambda_1$ divide in maniera esatta (senza resto) il polinomio di grado n in λ: $\det(A - \lambda I_n)$.

Se è una soluzione doppia, allora il polinomio $(\lambda - \lambda_1)^2$ divide in maniera esatta (senza resto) il polinomio di grado n in λ: $\det(A - \lambda I_n)$. E così via.

La molteplicità, cioè il massimo esponente con cui il polinomio $(\lambda - \lambda_1)^m$ divide in maniera esatta (senza resto) il polinomio di grado n in λ: $\det(A - \lambda I_n)$, si dice *molteplicità algebrica dell'autovalore* λ_1.

La molteplicità geometrica dell'autovalore λ_1 relativo alla matrice A è la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore λ_1.

Si può dimostrare che la molteplicità geometrica di un autovalore di A è sempre minore o uguale alla molteplicità algebrica dell'autovalore.

5.8.4 Teorema sugli autovettori di una matrice A

Siano $\underline{x}_1, ..., \underline{x}_k$ autovettori di una matrice A relativi agli autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_k$ distinti. Allora gli autovettori $\underline{x}_1, ..., \underline{x}_k$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione

Dimostreremo il teorema per induzione su k, numero degli autovettori considerati della matrice A.

Il risultato è vero per $k = 1$ poichè un autovettore è sempre diverso dal vettore nullo e, quindi, linearmente indipendente.

Supponiamo che il teorema sia stato dimostrato per ogni insieme di $k - 1$ autovettori. Supponiamo che $\underline{x}_1, ..., \underline{x}_k$ siano k autovettori relativi a k autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_k$ distinti e che esistano k scalari $c_1, ..., c_k$ tali che $c_1\underline{x}_1 + c_2\underline{x}_2 + ... + c_k\underline{x}_k = \underline{0}$.

Moltiplicando questa relazione per la matrice A abbiamo

$$A(c_1\underline{x}_1 + c_2\underline{x}_2 + ... + c_k\underline{x}_k) = A\,\underline{0} = O$$

ma anche

$$A(c_1\underline{x}_1 + c_2\underline{x}_2 + ... + c_k\underline{x}_k) = c_1A\underline{x}_1 + c_2A\underline{x}_2 + ... + c_kA\underline{x}_k = c_1\lambda_1\underline{x}_1 + c_2\lambda_2\underline{x}_2 + ... + c_k\lambda_k\underline{x}_k$$

cioè

$$\sum_{1=1}^{k} c_iA\underline{x}_i = \underline{0} = \sum_{1=1}^{k} c_i\lambda_i\underline{x}_i$$

Moltiplichiamo la relazione $\sum_{1=1}^{k} c_i\underline{x}_i = \underline{0}$ per λ_k e otteniamo $c_1\lambda_k\underline{x}_1 + c_2\lambda_k\underline{x}_2 + ... + c_k\lambda_k\underline{x}_k = \underline{0}$.

Sottraiamo quest'ultima relazione dalla relazione $\sum_{1=1}^{k} c_i\lambda_i\underline{x}_i = \underline{0}$ e otteniamo

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_k)\underline{x}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_k)\underline{x}_2 + ... + c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\underline{x}_{k-1} = \underline{0}$$

Ma, per ipotesi d'induzione, $x_1, ..., x_{k-1}$ sono $k-1$ autovettori di A, relativi ai $k-1$ autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_{k-1}$ distinti. Quindi sono linearmente indipendenti. Perciò $c_1(\lambda_1 - \lambda_k) = c_2(\lambda_2 - \lambda_k) = ... = c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)$.

Ora, $\lambda_1 - \lambda_k \neq 0, \lambda_2 - \lambda_k \neq 0, ..., \lambda_{k-1} - \lambda_k \neq 0$ poichè gli autovalori sono distinti. Quindi deve essere $c_1 = c_2 = ... = c_{k-1} = 0$. Infine, da $c_1\underline{x}_1 + c_2\underline{x}_2 + ... + c_k\underline{x}_k = \underline{0}$ segue, poichè $c_1 = c_2 = ... = c_{k-1} = 0$, che anche $c_k = 0$.

Quindi gli autovettori $\underline{x}_1, ..., \underline{x}_k$ sono linearmente indipendenti.

5.8.5 Spettro reale di una matrice

L'insieme degli autovalori reali distinti di una matrice A si dice *spettro reale della matrice* A:

$$S = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \ | \ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_i \neq \lambda_j\ \forall\ i \neq j,\ \lambda_i \text{ autovalore di } A\}$$

Sia poi $\overline{S} = \{\ |\lambda_i| \ | \ i = 1, ..., k,\ \lambda_i \in S\}$: $\max(\overline{S})$ si dice *raggio spettrale reale di* A e si indica con $\rho(A)$.

5.8.6 Proprietà degli autovalori di una matrice A

1) Sia A una matrice quadrata $n \times n$ e sia λ_i un suo autovalore. Indichiamo con $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$ e così via. Allora λ_i^r è un autovalore della matrice A^r.

2) Sia A una matrice quadrata $n \times n$ con n autovettori linearmente indipendenti $\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_n$. Sia $\underline{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$ con $i = 1, ..., n$.

   Costruiamo la matrice B $n \times n$ così: $B = \begin{Vmatrix} x_{11} & x_{21} & ... & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & ... & x_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{1n} & x_{2n} & ... & x_{nn} \end{Vmatrix}$ allora:

   a) B è non singolare;

   b) la matrice $B^{-1}AB$ è di questo tipo:

$$B^{-1}AB = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{Vmatrix}$$

   ove $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sono gli autovalori di A.

   Osserviamo che non necessariamente una matrice A $n \times n$ ha n autovettori linearmente indipendenti. Per esempio la matrice $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ ha equazione caratteristica $\lambda^2 = 0$, quindi l'autovalore $\lambda_1 = 0$ ha molteplicità algebrica 2.

   Calcolando la sua molteplicità geometrica, però, si trova che essa è uguale a 1. Quindi non esistono due autovettori relativi ad A linearmente indipendenti.

   In generale, se una matrice A $n \times n$ ha n autovalori reali distinti, allora certamente la matrice A ha n autovettori linearmente indipendenti. Esistono però matrici A $n \times n$ che hanno autovalori reali di molteplicità algebrica maggiore di 1 ed hanno anche n autovettori linearmente indipendenti.

3) Sia A una matrice quadrata $n \times n$ e supponiamo che abbia n autovalori reali, anche non distinti, $\lambda_1, ..., \lambda_n$. A questi n autovalori corrispondano n autovettori $\underline{x}_1, ..., \underline{x}_n$. Sia $\underline{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in})$ con $i = 1, ..., n$.
   Costruiamo la matrice B $n \times n$ come al punto 2. Se gli autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_n$ non sono distinti e gli autovettori $\underline{x}_1, ..., \underline{x}_n$ non sono linearmente indipendenti, allora non è detto che la matrice B sia non singolare. Sussiste l'uguaglianza:

$$AB = B \cdot \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{Vmatrix}$$

5.9 Matrici ortogonali

Le matrici ortogonali sono matrici quadrate A per cui vale la proprietà $AA^t = A^tA = I$.

Esempio

Sia $\quad A = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| \qquad A^t = A^{-1} = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|$

Proprietà delle matrici ortogonali

a) Sia A una matrice ortogonale, allora $\det(A) = \pm 1$. Infatti da $AA^t = I$ risulta $\det(AA^t) = \det(I) = 1$, ma $\det(AA^t) = \det(A) \cdot \det(A^t)$ e $\det(A^t) = \det(A)$. Quindi $\det(A)^2 = 1$.

b) Una matrice ortogonale A è non singolare e la sua inversa A^{-1} coincide con la sua trasposta.

c) Sia A una matrice ortogonale $n \times n$ e consideriamo due colonne di A:

$$\begin{array}{cc} a_{1i} & a_{1\ell} \\ a_{2i} & a_{2\ell} \\ \dots & \dots \\ a_{ni} & a_{n\ell} \end{array}$$

se $i \neq \ell$, cioè abbiamo due colonne distinte di A, allora, poichè $A^tA = I$, risulta:

$$a_{1i}a_{1\ell} + a_{2i}a_{2\ell} + \dots + a_{ni}a_{n\ell} = 0$$

se $i = \ell$, cioè consideriamo una sola colonna di A, allora abbiamo:

$$(a_{1i})^2 + (a_{2i})^2 + \dots + (a_{ni})^2 = 1$$

d) Una relazione analoga a quella vista in (c) vale per due righe della matrice A, poichè $AA^t = I$.

e) Se A, B sono matrici ortogonali, entrambe $n \times n$, allora il loro prodotto AB è ancora una matrice ortogonale. Infatti

$$(AB)(AB)^t = (AB)(B^tA^t) = A(BB^t)A^t = AI_nA^t = AA^t = I_n$$

Vale anche $(AB)^t(AB) = I_n$.

f) Se A è una matrice ortogonale, allora A^{-1} è ancora una matrice ortogonale. Infatti $A^{-1} = A^t$ quindi

$$(A^{-1})(A^{-1})^t = A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t = I$$

Analogamente, $(A^{-1})^tA^{-1} = I$.

g) Ogni matrice identità $I_2, I_3, \dots$ è ortogonale.

h) Sia A una matrice ortogonale $n \times n$. Consideriamo due vettori $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ e trasformiamoli in matrici colonna $\quad x = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{array} \right\|, \quad y = \left\| \begin{array}{c} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{array} \right\|$ allora x^t sarà la matrice riga $x = \left\| \begin{array}{ccc} x_1 & \dots & x_n \end{array} \right\|$. Consideriamo questa matrice riga come il vettore $\underline{x}$ di partenza.

Risulta

$$(Ax)^t(Ay) = (x^tA^t)(Ay) = x^t(A^tA)y = x^ty \qquad \text{quindi} \qquad (Ax)^t(Ax) = x^tx = \|\underline{x}\|^2$$

ma

$$(Ax)^t(Ax) = \|Ax\|^2 \qquad \text{quindi} \qquad \|Ax\|^2 = \|\underline{x}\|^2$$

ed essendo le norme numeri reali positivi è anche $\|Ax\| = \|\underline{x}\|$.

5.10 Trasformazioni lineari fra spazi vettoriali e matrici

Siano V, W due spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ (eventualmente di dimensioni diverse). Sia $T : V \to W$ una applicazione da V a W. T si dirà una *trasformazione lineare* se:

1) $T(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = T(\underline{v}_1) + T(\underline{v}_2)$ per ogni $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$;

2) $T(\lambda\underline{v}) = \lambda T(\underline{v})$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $\underline{v} \in V$.

Sia ora A una matrice $m \times n$, $\mathbb{R}^n$ lo spazio vettoriale reale di dimensione n ed $\mathbb{R}^m$ lo spazio vettoriale reale di dimensione m. Per ogni vettore $\underline{u} = (u_1, ..., u_n)$ consideriamo la matrice colonna $u = \begin{Vmatrix} u_1 \\ ... \\ u_n \end{Vmatrix}$, allora Au è una matrice riga $\begin{Vmatrix} v_1 & ... & v_m \end{Vmatrix}$.

Consideriamo questa matrice riga come il vettore $\underline{v} = (v_1, ..., v_m)$ di $\mathbb{R}^m$.

L'applicazione $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definita da $T_A(\underline{u}) = Au$ è una trasformazione lineare.

5.11 Norma di una matrice reale

Sia A una matrice $m \times n$ e consideriamo la trasformazione lineare $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sopra definita. Consideriamo poi gli infiniti numeri reali così ottenuti:

$$\frac{\|Ax\|_{\mathbb{R}^m}}{\|\underline{x}\|_{\mathbb{R}^n}} \qquad \text{ove } \underline{x} \neq \underline{0}$$

Questo insieme di numeri reali ammette estremo superiore:

$$\sup_{\underline{x}\neq\underline{0}} \left\{ \frac{\|Ax\|_{\mathbb{R}^m}}{\|\underline{x}\|_{\mathbb{R}^n}} \right\}$$

Tale sup, preso sui vettori $\underline{x} \neq \underline{0}$ è detto *norma della matrice* A ed è indicato con $\|A\|$.

Proprietà della norma di una matrice reale

a) $\|A\| \geq 0$ e $\|A\| = 0$ se e solo se $A = O$;

b) $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$;

c) se A, B sono entrambe matrici $m \times n$ è $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;

d) se A, B sono matrici per le quali è definito il prodotto AB, risulta $\|AB\| = \|A\|\|B\|$;

e) $\|I\| = 1$ ove I è la matrice identità $n \times n$.