PRIMA PROVA PARZIALE DI MATEMATICA DISCRETA.

27 OTTOBRE 2004

1. DIMOSTRARE CHE $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

2. COMPLETARE $1+2+\dots+n=O(\dots)$

3. DIMOSTRARE CHE $n<2^n$ PER OGNI n.

4. SIANO $f: \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ DUE FUNZIONI. DEFINIRE QUANDO f E' O GRANDE DI g.

5. DETERMINARE SE IL SEGUENTE INSIEME DI VETTORI DI $\mathbb{R}^3$ E' LINEARMENTE INDIPENDENTE O DIPENDENTE:
$\{(1,1,1),(0,3,2),(1,0,0),(2,1,-1)\}$

6. a) DIRE QUANDO UN SOTTOINSIEME S DI $\mathbb{R}^n$ E' UNA BASE PER $\mathbb{R}^n$

   b) CONSIDERIAMO IL SOTTOINSIEME $\{(-1,2,2),(2,2,-1),(3,0,-3),(2,-1,2)\}$ DI $\mathbb{R}^3$. DETERMINARE UN SOTTOINSIEME DI ESSO CHE SIA UNA BASE PER $\mathbb{R}^3$.

7. DIMOSTRARE CHE UN SOTTOINSIEME S DI $\mathbb{R}^n$ GENERA UNIVOCAMENTE OGNI VETTORE DI $L(S)$ SE E SOLTANTO SE GENERA UNIVOCAMENTE IL VETTORE ZERO.

8. DIMOSTRARE CHE I VETTORI $(1,-1,2,3)$, $(3,0,4,-2)$ DI $\mathbb{R}^4$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI. AGGIUNGERE AI DUE VETTORI DATI ALTRI DUE VETTORI DI $\mathbb{R}^4$ PER OTTENERE UNA BASE PER $\mathbb{R}^4$.

1 PROVA PARZIALE

1ª pag.

1. DIMOSTRARE CHE $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Sia $A \subset N$

- dimostriamo che $1 \in A$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

- assumiamo che $K \in A$ e che sia $K \geq 1$

$$1+2+\ldots+K = \frac{K(K+1)}{2} \qquad \text{IPOTESI D'INDUZIONE}$$

- dobbiamo dimostrare che $K+1 \in A$

$$1+2+\ldots K+(K+1) = \frac{(K+1)(K+2)}{2} \qquad \text{TESI D'INDUZIONE}$$

inizio dall'IPOTESI D'INDUZIONE e sommo a destra e a sinistra dell'equazione l'addendo K+1. Ottengo

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+K+(K+1) &= \frac{K(K+1)}{2} + K+1 \\ &= \frac{K(K+1)+2(K+1)}{2} \quad \text{raccolgo}(K+1) \\ &= \frac{(K+1)(K+2)}{2} \quad \text{TESI D'INDUZIONE} \end{aligned}$$

perciò è vera $\forall K \in N$

2. e 4. COMPLETARE $f(n) = 1+2+\ldots n = O(\ldots)$

$f(n) = O(g(n))$ se esiste una costante c e 1 numero naturale $n > n_0$ tale che $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$ $\forall n \geq n_0$

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots n &= n+n+\ldots \text{ n volte} \\ &= n^2 \qquad \text{perciò } f(n) = O(n^2) \quad \text{BO?} \end{aligned}$$

3. DIMOSTRARE che $n < 2^n$ per ogni n

- $1 \in N$: $1 < 2^1$
- $K \in N$: $K < 2^K$ IPOTESI D'INDUZIONE
- $K+1 \in N$: $K+1 < 2^{K+1}$ TESI D'INDUZIONE

INIZIO dalla TESI d'INDUZIONE e dico che

$K+1 < 2^K \cdot 2 \Rightarrow$ cioè $K+1 < 2^K + 2^K$ ma per ipotesi $2^K > K$

dunque $K+1 < K+K < 2^K + 2^K$ quindi è verificato che $K+1 < 2^K$

quindi la proposizione è vera $\forall n$

5. DETERMINARE SE IL SEGUENTE INSIEME DI VETTORI DI $\mathbb{R}^3$ È LINEARMENTE INDIPENDENTE o DIPENDENTE

$$\{(1,1,1)(0\,3\,2)(1\,0\,0)\,(2\,1\,-1)\}$$

- un insieme di vettori è linearmente indipendente se genera in maniera univoca il VETTORE NULLO $\underline{O}$ formato da tutti ZER[illegible]

cioè $S=\{(v_1)(v_2)(v_m)\}$ è LIN. INDIP se $\sum \alpha_i v_i = 0$ con tutti gli $\alpha_i = 0$

NB se contiene il vettore nullo è LIN. DIPEND. ← è LIN. DIPEND. se $\sum \alpha_i v_i = 0$ con almeno un $\alpha_i \neq 0$

$$x(1,1,1)+y(0\,3\,2)+z(1\,0\,0)+w(2\,1\,-1)=\underline{0}$$

PRODOTTO PER SCALARE

$$(x\;x\;x)+(0\;3y\;2y)+(z\;0\;0)+(2w\;w\;-w)=0$$

SOMMA DI VETTORI

$$\begin{cases} x+z+2w=0\\ x+3y+w=0\\ x+2y-w=0\end{cases}\quad \begin{cases} x=-z-2w\\ -z-2w+3y+w=0\\ -z-2w+2y-w=0\end{cases}\quad \begin{cases} =\\ -z-w+3y=[illegible]\\ -z-3w+2y=[illegible]\end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-z-2w\\ +z=+3y-w\\ -(3y-w)-3w+2y=0\end{cases}\quad \begin{cases} x=-(3y-w)-2w\\ z=3y-w\\ -3y+w-3w+2y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-3y+w-2w\\ z=3y-w\\ -y-2w=0\end{cases}\quad \begin{cases} x=-3y-w\\ z=3y-w\\ +y=-2w\end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-3(-2w)-w\\ z=3(-2w)-w\\ y=-2w\end{cases}\quad \begin{cases} x=5w\\ z=-7w\\ y=-2w\end{cases}$$

IL SISTEMA HA SOLUZIONI QUINDI: IL'INSIEME DI VETTORI È LINEARMENTE DIPENDENTE

6. DIRE QUANDO UN SOTTOINSIEME S DI $\mathbb{R}^n$ È UNA BASE PER $\mathbb{R}^n$

a) • un insieme S finito non vuoto di vettori di $\mathbb{R}^n$ si dice BASE se:

a) $L(S) = \mathbb{R}^n$ cioè se S genera $\mathbb{R}^n$

b) se S è linearmente indipendente

b) $S = \{(-1,2,2)(2\,2\,-1)(3\,0\,-3)(2\,-1\,2)\}$

Considero il sottoinsieme T formato da $T = \{(-1,2,2)(2\,2\,-1)(2\,-1\,2)\}$

dato che i vettori sono 3, cioè il n° giusto per poter essere una base di $\mathbb{R}^3$ verifico che siano lin. INDIP.

$$x(-1,2,2) + y(2\,2\,-1) + z(2\,-1\,2) = 0$$

$$\begin{cases} -x+2y+2z=0 \\ 2x+2y-z=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} +x = +2y+2z \\ 2(2y+2z)+2y-z=0 \\ = \end{cases} \quad \begin{cases} = \\ 4y+4z+2y-z=0 \\ = \end{cases}$$

$$\begin{cases} = \\ \frac{6y}{-3} = \frac{-3z}{-3} \\ \end{cases} \quad \begin{cases} z = -2y \\ x = 2y+2(-2y) \\ = \end{cases} \quad \begin{cases} z=-2y \\ x = 2y-4y \\ = \end{cases} \quad \begin{cases} z = -2y \\ x = -2y \\ 2(-2y)-y+2(-2y)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$$ sono linearmente indipendenti quindi costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$

7. DIMOSTRARE CHE UN SOTTOINSIEME S di $\mathbb{R}^m$ GENERA UNIVOCAMENTE OGNI VETTORE DI $L(S)$ se e soltanto se GENERA UNIVOCAMENTE IL VETTORE ZERO.

DIM: Supponiamo che S generi in maniera univoca il vettore $\underline{V} \in L($ diverso dal vettore nullo. Questo $\underline{V}$ sarà formato dalle combinazioni lineari $\underline{V} = v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + \dots V_m\alpha_m$

Se S non generasse in maniera univoca $\underline{V}$ esisterebbero altri scalari per i quali $\underline{V} = v_1\beta_1 + v_2\beta_2 + \dots V_m\beta_m$

Per cui il vettore nullo sarebbe dato:

sia da $\underline{0} = 0 \cdot v_1 + 0 v_2 + \dots 0 v_m$

che da $\underline{0} = (\alpha_1-\beta_1)v_1 + (\alpha_2-\beta_2)v_2 + \dots (\alpha_m-\beta_m)v_m$

ma affinché ~~fosse~~ sia nullo, implica che $\alpha_1-\beta_1=0$ cioè $\alpha_i=\beta_i$ quindi c'è solo uno scalare che permette ad S di generare

8. DIMOSTRARE CHE I VETTORI $(1, -1\ 2\ 3)$ $(3\ 0\ 4\ -2)$ di $\mathbb{R}^4$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.
AGGIUNGERE AI 2 VETTORI DATI ALTRI 2 VETTORI di $\mathbb{R}^4$ PER OTTENERE UNA BASE PER $\mathbb{R}^4$

8.1) dimostro che sono lin. indip.

$$x(1\ -1\ 2\ 3) + y(3\ 0\ 4\ -2) = 0$$

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ -x = 0 \\ 2x + 4y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

→ se $x = 0$ anche $y = 0$
quindi sono linearmente indipendenti

8.2) aggiungo 2 vettori a quelli di partenza

$$T = \{(1\ -1\ 2\ 3)(3\ 0\ 4\ -2)(0\ 0\ 0\ 1)(1\ 0\ 0\ 0)\}$$

così ottengo che

$$\begin{cases} x + 3y + w = 0 \\ -x = 0 \\ 2x + 4y = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

→ se $x = 0$ anche tutte le altre variabili vanno a zero
quindi T è linearmente indipendente e dunque base di $\mathbb{R}^4$