

### **Definizione frequentista**

L'insoddisfazione della definizione classica portò a costruire la probabilità sulle frequenze, intendendo come frequenza relativa dei successi il rapporto fra il numero di volte in cui l'evento si verifica e il numero delle prove effettuate, si giunse così alla definizione frequentista della probabilità di un evento intesa come:

*il limite della frequenza relativa dei successi quando tende all'infinito il numero delle prove fatte nelle stesse condizioni.*

In altre parole, accettando l'ipotesi che la frequenza relativa si vada stabilizzando intorno ad un certo numero, è proprio questo numero che viene preso come valore della probabilità.

Anche la definizione frequentista presenta aspetti criticabili, innanzitutto perché resta imprecisato il numero delle prove necessarie per arrivare ad un valore abbastanza stabilizzato che ci fornisca la probabilità., ma soprattutto l'esigenza che le prove successive siano fatte nelle stesse condizioni presenta problemi. A rigore una simile condizione non è mai perfettamente verificata, essa restringe l'applicabilità della definizione a situazioni ben delimitate, come ad esempio i lanci successivi di un dado, ma a guardare bene anche in questo caso da un lancio all'altro può cambiare sia pur di poco la situazione ambientale (umidità, pressione, temperatura, ecc.) che influisce sul risultato, inoltre la forma del dado stesso può variare nell'urto che riceve cadendo.

Quindi alla domanda se resterà costante la probabilità dell'evento considerato si può rispondere:

*sì, entro limiti di approssimazione largamente sufficienti in pratica  
no, se si richiede una costanza valida rigorosamente*

Si può osservare che anche la definizione frequentista, come quella classica, è operativa.

Occorre anche sottolineare che ci sono delle situazioni dove essa platealmente non vale:

si pensi ad esempio all'incontro fra due squadre di calcio o due tennisti ecc..

La frequenza (il rapporto) delle prove favorevoli all'evento e il numero totale delle prove ha le stesse caratteristiche matematiche del rapporto fra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili

### **Esempio:**

Se una moneta viene lanciata 1000 volte e 495 volte presenta testa, la probabilità di testa secondo la definizione frequentista può essere stimata uguale a  $495/1000 = 0.495$

### **Definizione soggettiva**

In molti casi si impone l'esigenza di considerare l'evento singolo e di riferire la probabilità a questo, da questa esigenza è nata la concezione soggettiva che si può fare risalire a **Daniele Bernoulli** e recentemente ripresa e sviluppata dall'italiano **Bruno De Finetti** (1906-1985).

In questa impostazione la probabilità viene definita come: *il grado di fiducia che una persona ha nel verificarsi dell'evento*

In questo modo la probabilità perde la sua caratteristica assoluta di numero intrinsecamente legato all'evento, per dipendere dalla persona che la valuta e dalle informazioni disponibili

Questa definizione però, così com'è, non è ancora operativa e necessita di essere definita in modo più preciso, per fare questo si fa riferimento alle scommesse e si definisce la probabilità come segue: *il prezzo equo da pagare per ricevere 1 se l'evento si verifica e 0 se l'evento non si verifica, dove 1 rappresenta una qualsiasi unità di misura, come ad esempio 1 €, 1 \$, 100 milioni, ecc.*

Si pensi ad esempio ad una lotteria fatta mediante i numeri della tombola, ognuno paga una certa quota, ad esempio 1 € e se il suo numero viene estratto vince 90 € che in questo caso costituisce il piatto e rappresenta l'unità di misura, il prezzo pagato cioè 1/90 rappresenta la probabilità di vincere.

Nella definizione però si è parlato di prezzo equo e questo richiede una precisazione che viene data mediante la **condizione di equità**, detta anche **di coerenza** che stabilisce che:

*non si devono valutare le probabilità in modo tale che sia possibile ottenere una vincita certa o una perdita certa.*



Per chiarire questo punto supponiamo che una persona presenti una moneta dicendo che è truccata in modo tale che la probabilità che esca testa cioè  $P\{T\} = \frac{1}{2}$  e la probabilità che esca croce  $P\{C\} = \frac{1}{4}$ , si può obiettare subito che questo non può andare perché la somma di  $P\{T\}$  e  $P\{C\}$  deve essere uguale a 1, questa è un'esigenza intuitiva alla quale la condizione di equità da una giustificazione convincente, infatti facendo contemporaneamente 2 scommesse, una su testa e l'altra su croce, si pagherebbe  $\frac{1}{2}$  per la prima più  $\frac{1}{4}$  per la seconda vincendo poi 1 con un guadagno netto di  $\frac{1}{4}$  in contraddizione con la condizione di coerenza, ciò si verifica perché  $P\{T\}+P\{C\} < 1$ , se  $P\{T\}+P\{C\}$  fosse maggiore di 1, si avrebbe una perdita certa, la condizione di coerenza impone che  $P\{T\}+P\{C\}=1$ .

Lo stesso ragionamento vale se ci sono più di 2 alternative, la critica più diffusa a questa impostazione è di essere **soggettiva** cioè di fondare la probabilità sui valori "dei singoli".

Si è sviluppato un ampio dibattito, spesso polemico, con gli oggettivisti che accusano l'impostazione soggettiva di rendere impossibile la comunicazione fra persone diverse ed i soggettivisti che denunciano l'illusorietà della pretesa oggettività delle altre impostazioni.

Le tre definizioni date sono profondamente distanti concettualmente, si è visto inoltre che tutte e tre le impostazioni non sono certamente esenti da critiche, per ovviare a queste difficoltà i matematici preferiscono trattare la probabilità da un punto di vista assiomatico, facendo ricorso alla teoria degli insiemi.

**L'impostazione assiomatica o ipotetico deduttiva** è largamente preferita in ogni campo della matematica perché permette di raggiungere un livello accettabile di rigore logico.

Il calcolo delle probabilità non poteva sfuggire a questa esigenza di sistemazione, si può verificare che le tre impostazioni date arrivano tutte alle stesse leggi matematiche espresse dagli assiomi della probabilità, ciò rende naturale prendere tali leggi per una costruzione assiomatica.

La teoria matematica si può quindi sviluppare a partire da queste leggi senza precisare la definizione di probabilità da cui provengono.

Si può adottare questa linea di azione ottenendo così una costruzione matematica che non esclude chi si sente di aderire ad una specifica impostazione.

