

**Esercitazione**

Per illustrare i concetti precedenti supponiamo che un'urna contenga

2 palline bianche

4 palline nere

e che due palline vengano estratte dall'urna.

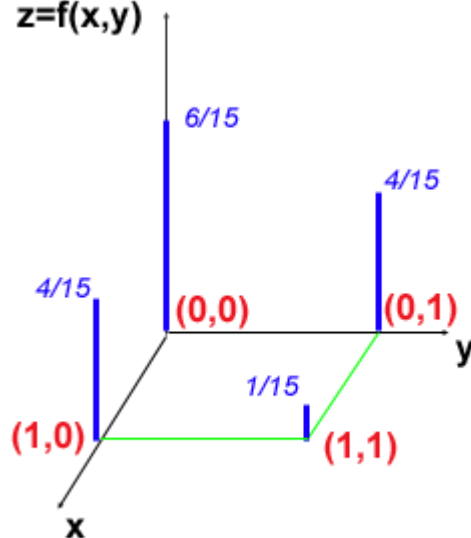
Le variabili  $X$  e  $Y$  rappresentino i risultati delle due estrazioni, 0 che corrisponde a una pallina nera e 1 che corrisponde ad una pallina bianca. Allora ogni possibile risultato sarà rappresentato dai 4 punti del piano  $x, y$  di coordinate  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ .

Dai contenuti dell'urna e dall'ordine in cui le estrazioni sono fatte segue direttamente dalla formula (2) che

$$\begin{cases} f(0,0) = f(0) * f(0|0) = \frac{4}{6} * \frac{3}{5} = \frac{6}{15} \\ f(0,1) = f(0) * f(1|0) = \frac{4}{6} * \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \\ f(1,0) = f(1) * f(0|1) = \frac{2}{6} * \frac{4}{5} = \frac{4}{15} \\ f(1,1) = f(1) * f(1|1) = \frac{2}{6} * \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \end{cases}$$

I valori di  $f(x, y)$  sono riportati nel grafico a segmenti di figura 1

**Fig 1)  $z=f(x,y)$**



Per illustrare il metodo di ottenere una distribuzione marginale e una distribuzione condizionata dalla distribuzione congiunta assumiamo ora che siano noti soltanto i valori finali della  $f(x, y)$  appena calcolati. Così la sola informazione disponibile è quella data nella figura 1 indipendentemente da come sono stati ottenuti quei numeri.

La funzione di densità marginale della variabile  $X$  si può ottenere semplicemente applicando la

formula (3) da cui si ha che  $f(x) = \sum_{y=0}^1 f(x, y)$  e quindi

$$\begin{cases} f(0) = \sum_{y=0}^1 f(0, y) = f(0,0) + f(0,1) = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} = \frac{2}{3} \\ f(1) = \sum_{y=0}^1 f(1, y) = f(1,0) + f(1,1) = \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3} \end{cases}$$



Se i 4 punti nel piano  $x, y$  si pensano come punti di massa di probabilità, la cui massa totale è uguale a 1, allora la distribuzione marginale della variabile  $X$  rappresenta la distribuzione della massa di probabilità lungo l'asse  $x$  dopo che i punti di massa di probabilità nel piano  $x, y$  sono stati proiettati perpendicolarmente sull'asse  $x$ .

La funzione di densità condizionata di  $Y$  per un fissato  $x$  si può ottenere applicando la formula (4) e usando i risultati appena ottenuti.

Così se alla variabile  $X$  viene assegnato il valore  $x=1$  si ha che  $f(y|1) = \frac{f(1,y)}{f(1)}$  da cui si ricava

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0|1) = \frac{f(1,0)}{f(1)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{15}{5}} = \frac{4}{5} \\ f(1|1) = \frac{f(1,1)}{f(1)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{15}{5}} = \frac{1}{5} \end{array} \right.$$

Geometricamente  $f(y|1)$  rappresenta la distribuzione della massa di probabilità lungo la retta  $x=1$  quando i due punti su questa retta sono moltiplicati per un numero  $\frac{1}{f(1)}$  tale da rendere la somma delle masse di probabilità dei due punti uguale a 1.

### Esempio

Come secondo esempio in cui la funzione di densità congiunta viene data direttamente

consideriamo la funzione di densità  $f(x, y) = \frac{1}{27}(x+2y)$ , dove  $x$  e  $y$  possono assumere solo i

valori interi 0, 1 e 2. Lo spazio campione con le sue probabilità calcolate tramite questa formula è mostrato nella figura 2 vista in precedenza.

Dalla formula (3) la funzione di densità marginale della variabile  $X$  è data dalla

$$f(x) = \sum_{y=0}^2 \frac{1}{27}(x+2y) = \frac{1}{27}[x + (x+2) + (x+4)] = \frac{3x+6}{27} = \frac{1}{9}(x+2)$$

In modo simile sommando su tutti i possibili valori della variabile  $X$  si ha che

$$g(y) = \sum_{x=0}^2 \frac{1}{27}(x+2y) = \frac{1}{27}(2y+1+2y+2+2y) = \frac{1}{9}(2y+1)$$

È chiaro che in questo caso la  $f(x, y)$  non è uguale al prodotto delle due funzioni di densità individuale e quindi le due variabili casuali non sono indipendenti.

Dalla formula (4) vista ieri, e dal risultato ottenuto per la  $f(x)$ , segue che, la funzione di densità condizionata della variabile  $Y$  per un fissato valore  $x$  è data dalla

$$f(y|x) = \frac{\frac{1}{27}(x+2y)}{\frac{1}{9}(x+2)} = \frac{x+2y}{3(x+2)}$$

se ad  $x$  viene assegnato, ad esempio, il valore  $x=2$ , allora si ha che  $f(y|2) = \frac{2+2y}{12} = \frac{1}{6}(y+1)$ .

Questa funzione sarebbe utile se si volessero calcolare le probabilità per i vari valori della variabile  $Y$  quando si sa che la variabile  $X$  ha il valore 2. Si può facilmente verificare che questa è una



funzione di densità di probabilità, infatti, sommando i tre valori di questa funzione corrispondenti a  $y=0,1,2$  si ottiene come risultato 1, infatti

$$f(0|2) = \frac{1}{6}, f(1|2) = \frac{2}{6}, f(2|2) = \frac{3}{6}$$

### Variabili casuali contigue

Una variabile casuale continua è una variabile definita su di uno spazio campione continuo.

Variabili come il peso, la temperatura, la velocità, ecc. sono variabili continue. Si potrebbe discutere sul fatto che in realtà tutte queste variabili sono discrete perché qualunque strumento di misura venga usato, esso presenta sempre una limitata accuratezza di lettura comunque però dal punto di vista matematico è conveniente fare l'ipotesi che questa limitazione non esista.

### Funzione di densità di probabilità

Per calcolare le probabilità di una variabile casuale continua viene introdotta la **funzione di densità di probabilità o funzione di densità più semplicemente densità della variabile**.

La sua definizione formale si potrebbe dare immediatamente, ma cercheremo di motivarla esaminando ciò che accade a una funzione di densità discreta quando lo spazio campione diventa più denso. Per esaminare le proprietà delle variabili continue, consideriamone una, indicata con  $X$ , rappresentante lo spessore di un disco metallico prodotto da una certa macchina. Se la macchina producesse ad esempio 100 dischi e se questi dischi fossero misurati con tre cifre decimali, si avrebbero a disposizione 100 valori della variabile  $X$  con cui studiare il comportamento della macchina. Se questi 100 valori fossero raccolti e rappresentati sotto forma di tabella, si potrebbe trovare un insieme di valori come quelli illustrati in tabella1 che fornisce la frequenza assoluta con cui si sono presentati i vari valori della variabile  $X$ .

**Tab.1)**

$x$	0.231	0.232	0.233	0.234	0.235	0.236	0.237	0.238	0.239
$f$	1	2	8	18	28	24	13	4	2

$x$  valore della variabile,  $f$  frequenza

