

### Distribuzione di Poisson

Se il numero delle esecuzioni  $n$  è grande i calcoli implicati nell'usare la funzione di densità binomiale diventano piuttosto lunghi. Perciò sarebbe molto utile poter disporre di una conveniente approssimazione della distribuzione binomiale.

Risulta che per  $N$  esistono due ben note approssimazioni della distribuzione binomiale, una quando  $p$  è molto piccolo e l'altra quando non si è in questo caso. L'approssimazione che si applica quando  $p$  è molto piccolo è nota come la **funzione di densità di Poisson**, ed è definita come segue :

$$(3) f(x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}$$

Dove il parametro  $\mu$  è la media di distribuzione.

Sebbene la distribuzione di Poisson venga introdotta qui come una approssimazione della distribuzione binomiale, essa è una distribuzione ben nota e utile di per se e perciò non è da considerare semplicemente come una approssimazione della distribuzione binomiale.

Per verificare che la distribuzione di Poisson è una buona approssimazione di quella binomiale per  $n$  molto grande e  $p$  molto piccolo, si considera ciò che accade alla funzione di densità binomiale quando  $n$  tende all'infinito e  $p$  tende a 0 in modo tale che la media  $\mu = np$  rimanga fissa.

Il risultato che si ottiene si può esprimere sotto forma di teorema il cui enunciato è il seguente:

#### Teorema

*Se la probabilità  $p$  di successo in una singola esecuzione tende a 0 mentre il numero di esecuzioni  $n$  tende all'infinito in modo tale che la media  $\mu = np$  rimanga fissa, allora la distribuzione binomiale tenderà alla distribuzione di Poisson con media  $\mu$*

Le figure 1 e 2 sono state costruite per indicare con quale rapidità la distribuzione binomiale tende alla distribuzione di Poisson, le linee tratteggiate rappresentano la distribuzione di Poisson fissa per  $\mu = 4$ , e le linee continue la distribuzione binomiale per  $p = \frac{1}{3}$ ,  $p = \frac{1}{24}$  rispettivamente.

Sembrerebbe dall'esame di questo grafico che l'approssimazione di Poisson dovrebbe essere sufficientemente accurata per la maggior parte delle applicazioni quando  $n \geq 100$  e  $p \leq 0.05$

$$n = np = n \frac{1}{24} = 4 \quad n=96$$

Poiché la distribuzione di Poisson è stata ottenuta da quella binomiale mantenendo fissa la media  $\mu = np$  e permettendo ad  $n$  di tendere all'infinito, segue che i momenti della distribuzione di Poisson si possono ottenere dai corrispondenti momenti della distribuzione binomiale calcolando i valori limiti di questi ultimi.

Così la media della distribuzione di Poisson deve essere  $\mu = np$  e la varianza deve essere il valore limite della varianza binomiale cioè di  $n * p * q$ , ma se la media  $\mu$  è fissa  $p$  tenderà a 0 e  $n$  tenderà all'infinito.

Si ha quindi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} npq = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu q = \lim_{p \rightarrow 0} \mu(1-p) = \mu$ , questo fornisce l'interessante risultato

che la varianza di una variabile di Poisson è uguale alla sua media.

Sebbene la distribuzione di Poisson sia stata introdotta per mezzo della sua proprietà approssimante della distribuzione binomiale essa è un modello molto utile per trattare anche certi tipi di problemi senza rapporti con la distribuzione binomiale. Per esempio la distribuzione di Poisson è un modello soddisfacente per il numero di atomi che si disintegrano da un materiale radioattivo, per il numero di chiamate telefoniche su di una linea in un intervallo di tempo fisso, per il numero di screpolature sopra una lamina metallica, ecc.

Questi problemi sono del tipo in cui una variabile casuale si distribuisce nel tempo o nello spazio



Se si fa l'ipotesi che il numero di eventi che si verificano in intervalli di tempo che non si sovrappongono siano indipendenti, che la probabilità di un singolo evento che si verifichi in un piccolo intervallo di tempo siano approssimativamente proporzionate alla dimensione dell'intervallo e che la probabilità che si verifichi più di un evento in un singolo intervallo di tempo sia trascurabile rispetto alla probabilità che si verifichi soltanto un evento in quell'intervallo, allora si può dimostrare con opportune tecniche di calcolo, quando nelle precedenti ipotesi sono state precisate matematicamente che il numero di eventi in qualsiasi intervallo di tempo di dimensione fissata possiederà una distribuzione di Poisson lo stesso discorso si può applicare quando gli intervalli di tempo sono sostituiti da intervalli spaziali.

Perciò il numero di eventi che si distribuiscono in qualsiasi regione dello spazio di dimensione fissata seguirà una distribuzione di Poisson, un intervallo spaziale può essere naturalmente a 1, 2 o 3 dimensioni, così il numero di screpolature in una data lunghezza di filo metallico o in una data area di stoffa o in un dato blocco di calcestruzzo seguirà una distribuzione di Poisson.

*Un esperimento in cui le osservazioni si succedono in intervalli successivi, di tempo o di spazio, e per cui le ipotesi precedenti sono soddisfatte, cosicché gli eventi possiedono una distribuzione di Poisson, viene chiamato un Processo di Poisson.*

Così la distribuzione di Poisson è utile per trattare problemi riguardanti i processi di Poisson e non è giustificata quindi soltanto come una approssimazione della distribuzione binomiale

### Esercitazione

Come esempio d'uso della distribuzione di Poisson, come approssimazione di quella binomiale, consideriamo il problema di calcolare la probabilità che si trovino al massimo 5 valvole difettose in una scatola di 200 valvole se l'esperienza mostra che il 2% di tali valvole sono difettose.

In questo caso quindi  $\mu = np = 200 * 0.02 = 4$ , quindi usando la distribuzione di Poisson dove la variabile  $X$  rappresenta il numero di valvole difettose in una scatola di 200 valvole, la risposta

approssimante è data da: 
$$P\{X \leq 5\} = \sum_{x=0}^5 \frac{e^{-4} 4^x}{x!} = e^{-4} \left( 1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{6} + \frac{4^4}{24} + \frac{4^5}{120} \right) = 0.785$$

Lunghi calcoli, usando la funzione di densità binomiale, porterebbero al risultato che

$P\{x \leq 5\} = 0.788$ , quindi l'approssimazione in questo caso è molto buona, il che significa che

l'errore relativo è  $\left| \frac{\Delta P}{P} \right| = \left| \frac{0.785 - 0.788}{0.788} \right| = 0.0038 = 3.8 \%$

Ciò conferma quello che è già stato detto, cioè che l'approssimazione di Poisson si può ritenere sufficientemente accurata per la maggior parte delle applicazioni se, come avviene in questo caso,  $n \geq 100$ ,  $p < 0.05$ .

Come esempio d'uso della distribuzione di Poisson come modello per un processo di Poisson, consideriamo il problema seguente :

Supponiamo che l'esperienza abbia mostrato che il numero medio di chiamate telefoniche che arriva ad un quadro di controllo in un minuto è uguale a 5.

Se il quadro di controllo può trattare al massimo 8 chiamate al minuto, qual è la probabilità che esso non sia capace di trattare tutte le chiamate che arrivano in un minuto?

La probabilità richiesta si può ottenere calcolando la probabilità di ricevere al massimo 8 chiamate e poi sottraendo questa probabilità da 1.

Usando  $\mu = 5$  nella funzione di densità di Poisson si ottiene che 
$$P\{X \leq 8\} = \sum_{x=0}^8 \frac{e^{-5} 5^x}{x!} = 0.932.$$



Di conseguenza la probabilità richiesta è data da  $P\{X > 8\} = 1 - 0.932 = 0.068 = 6.8\%$

Per la natura delle ipotesi che hanno condotto alla distribuzione di Poisson, per problemi di questo tipo è legittimo scegliere qualunque intervallo di tempo o di spazio di lunghezza desiderata e calcolare la probabilità di eventi in questo intervallo tramite la distribuzione di Poisson con la vertenza di aggiustare la media  $\mu$  per quel intervallo.

Per esempio la soluzione di quel problema di calcolare la probabilità che si ricevano al massimo 6 chiamate in un periodo di 2 minuti quando il numero medio di chiamate al minuto è uguale a 5 si ottiene scegliendo  $\mu = 10$  e calcolando la probabilità come segue:

$$P\{X \leq 6\} = \sum_{x=0}^6 \frac{e^{-10} 10^x}{x!} = 0.13 = 13\%$$

Una soluzione basata sul trattare questo come un esperimento a 2 stadi, con ciascun minuto di tempo come uno stadio, darebbe origine a calcoli eccessivamente lunghi, si dovrebbe quindi essere spinti a risolvere il problema in questo modo così da apprezzare meglio la precedente proprietà della distribuzione di Poisson.

