

Poiché un sottoinsieme di un insieme di punti comprende la possibilità che il sottoinsieme coincida con l'intero insieme di punti o che esso non contenga nessun punto dell'insieme questa definizione comprende un evento che è certo di verificarsi (nel I° caso) o un evento che non può assolutamente verificarsi quando l'esperimento viene eseguito (nel II° caso).

Considerata la corrispondenza fra gli eventi e gli insiemi di punti, lo studio della relazione fra i vari eventi si può ricondurre allo studio della relazione fra i corrispondenti insiemi.

A tale scopo vengono comunemente utilizzati i diagrammi di Venn, che sono un conveniente sistema di rappresentazione, in cui lo spazio campionario, qualunque sia la sua dimensione o qualunque sia il numero di punti in esso contenuti, viene rappresentato per mezzo di un insieme di punti interni ad un rettangolo in un piano e viene indicato con  $S$ .

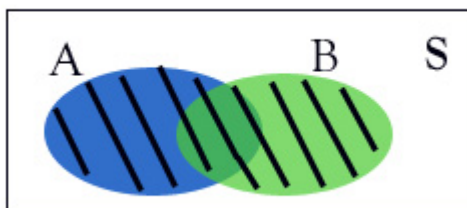
Fig 1)



Un evento  $A$ , che è perciò un sottoinsieme dei punti di questo rettangolo, è rappresentato dai punti che giacciono all'interno di una curva chiusa contenuta nel rettangolo. Se  $B$  è qualche altro evento di interesse esso sarà rappresentato dai punti interni a qualche altra curva chiusa nel rettangolo.

Questa rappresentazione è mostrata in figura 2:

Fig 2)



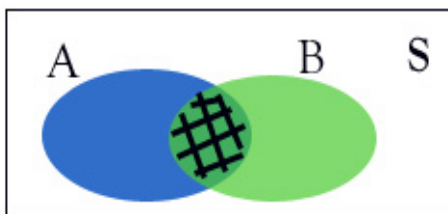
Allora se  $A, B$  sono due eventi associati ad un esperimento si può voler sapere se almeno uno degli eventi si verificherà quando l'esperimento viene eseguito. Ora l'insieme dei punti che consiste di tutti i punti che appartengono ad  $A$  o a  $B$  oppure sia ad  $A$  che a  $B$  è chiamato **l'unione di  $A$  e  $B$**  e si indica con il simbolo  $A \cup B$ .

Questo insieme di punti rappresentato in figura 2 dalla regione tratteggiata perciò rappresenta l'evento che si verifichi almeno uno degli eventi  $A$  e  $B$ . Come esempio se  $A$  è l'evento di ottenere un 6 sul I° dado, nel getto di due dadi, e  $B$  è l'evento di ottenere un 6 sul II° dado, allora  $A \cup B$  è l'evento di ottenere almeno un 6 nel gettare 2 dadi.

L'evento  $A$  consiste dei 6 punti dello spazio campionario la cui coordinate sono indicate nell'ultima colonna della tabella 1 e l'evento  $B$  consiste dei 6 punti indicati nell'ultima riga della tabella 1, l'evento  $A \cup B$  è allora l'insieme degli 11 punti indicati nell'ultima colonna e nell'ultima riga della tabella 1. Un altro evento di possibile interesse è quello di sapere se entrambi gli eventi  $A$  e  $B$  si verificheranno quando l'esperimento viene eseguito.

L'insieme dei punti che consiste di tutti i punti che appartengono sia ad  $A$  che a  $B$  è chiamato **l'intersezione di  $A$  e  $B$**  e si indica col simbolo  $A \cap B$ , questo insieme di punti è rappresentato in figura 3 dalla regione tratteggiata.

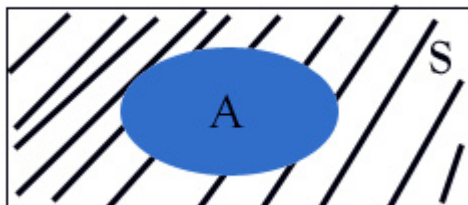
Fig. 3)



Nell'esempio del getto di due dadi dove  $A$  e  $B$  rappresentano gli stessi eventi di prima  $A \cap B$  è l'evento di ottenere un 6 su entrambi i dadi ed è rappresentato dall'unico punto di coordinate (6,6) che è l'intersezione dei punti dello spazio campione indicati nell'ultima colonna e nell'ultima riga della tabella suddetta.

In corrispondenza di qualsiasi evento  $A$  esiste un evento ad esso associato, indicato con  $\bar{A}$  con trattino sopra, che stabilisce che  $A$  non si verificherà quando l'esperimento viene eseguito. Esso è rappresentato da tutti i punti del rettangolo che non si trovano in  $A$ , e in figura 4 è rappresentato dalla regione tratteggiata:

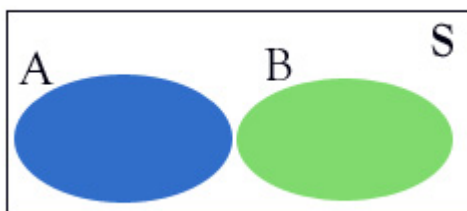
Fig 4)



L'evento  $\bar{A}$  viene chiamato **il complementare di  $A$  relativo allo spazio campione**.

Se due insiemi  $A$  e  $B$  non hanno punti in comune si dice che essi sono **disgiunti**, i 2 eventi come i 2 insiemi si chiamano **eventi disgiunti**, ma si chiamano anche **reciprocamente esclusivi**, perché il verificarsi di uno di essi esclude la possibilità del verificarsi dell'altro. Due eventi di questo tipo sono mostrati in figura 5:

Fig 5)



## Probabilità

Fissiamo ora l'attenzione sulle **funzioni di insieme**, perché ci servono per definire la probabilità.

Le funzioni che ci sono più familiari come è noto sono le **funzioni di punto**, ad es.  $f(x) = x^2$  è una funzione di questo tipo, perché a ciascun punto dell'asse  $x$  questa formula assegna il valore della funzione in quel punto.

Però come è noto la nozione di funzione è molto più ampia di questa, in quanto gli elementi del dominio della funzione anziché punti singoli possono essere insiemi di punti, in questo caso la funzione prende il nome di **funzione di insieme**, un esempio di funzione di insieme è quella il cui dominio consiste di intervalli sull'asse  $x$  ed essa fornisce la lunghezza dell'intervallo.

La probabilità come si è già detto può essere considerata come un modello per la frequenza del verificarsi di un certo evento in ripetute esecuzioni di un esperimento, perciò un modello di probabilità per un evento  $A$  dovrebbe essere un modello per cui la probabilità del suo verificarsi, indicata con  $P\{A\}$  dovrebbe essere uguale alla frequenza del verificarsi dell'evento stesso in ripetute esecuzioni dell'esperimento.

Poiché  $P\{A\}$  è una funzione definita su insiemi essa **è una funzione di insieme**.

Se un esperimento venisse ripetuto un gran numero di volte, i risultati si potrebbero usare per assegnare un valore a  $P\{A\}$ , tuttavia non è affatto necessario che l'esperimento venga eseguito prima che una tale probabilità venga assegnata, così nell'esperimento del lancio di due dadi, se  $A$  è l'evento di ottenere un 6 su entrambi i dadi, considerazioni di simmetria suggerirebbero il valore di  $\frac{1}{36}$  per la probabilità del verificarsi di questo evento.



Naturalmente ciascuno è libero di assegnare il valore che vuole, ma se l'assegnazione non è realistica il modello di probabilità gli sarà di scarsa utilità per fare previsioni riguardanti i futuri esperimenti.

Se le probabilità sono da interpretare come modelli per le frequenze del verificarsi di quegli eventi in ripetute esecuzioni dell'esperimento, ***tali probabilità dovrebbero possedere le proprietà essenziali delle frequenze***. Così una probabilità dovrebbe essere un numero compreso tra 0 e 1 perché una frequenza è un numero di questo tipo.

Inoltre la probabilità dello spazio campione  $S$  dovrebbe essere uguale a 1, perché uno qualsiasi dei risultati possibili si verificherà certamente quando l'esperimento viene eseguito.

Infine se due eventi  $A$  e  $B$  sono disgiunti la probabilità dell'unione di quegli eventi dovrebbe essere uguale alla somma delle probabilità dei singoli eventi, perché la frequenza che  $A$  o  $B$  si verifichi è uguale alla somma delle loro frequenze.

Si è provato che ogni altra ragionevole proprietà delle probabilità sarà soddisfatta se saranno verificate le seguenti 3 condizioni che si basano su quanto appena detto, questi sono chiamati ***gli assiomi della probabilità***. Essi impongono restrizioni sul tipo di funzione di insieme  $P$  che si può usare per calcolare le probabilità degli eventi, una funzione come questa viene chiamata ***una misura della probabilità***.

### **Diamo ora gli assiomi della probabilità:**

Una misura di probabilità  $P$  è una funzione di insieme, ha valori reali, definita su di uno spazio campione, che soddisfa :

$$\text{I}^\circ) \quad 0 \leq P\{A\} \leq 1$$

$$\text{II}^\circ) \quad P\{S\}=1$$

$$\text{III}^\circ) \quad P\{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + \dots$$

per ogni successione finita o infinita di eventi disgiunti  $A_1, A_2, \dots$  ecc..

*Si fa osservare che gli assiomi sono stati formulati nel 1933 da A.N. Kolmogorov*

Sarebbe molto difficile trovare una funzione  $P$  che fornisse valori di probabilità corrispondenti alle frequenze attese per ogni possibile sottoinsieme  $A$  di uno spazio campione, perché il numero di tali sottoinsiemi è estremamente grande anche per uno spazio campione contenente soltanto pochi punti. Fortunatamente per spazi campione contenenti soltanto un numero finito o una successione infinita di punti campione è sufficiente assegnare il valore della probabilità a ciascuno dei punti campione.

Il valore di  $P\{A\}$ , per qualsiasi sottoinsieme  $A$ , si determina allora facilmente dalle probabilità assegnate ai singoli punti campione ricorrendo al *terzo assioma delle probabilità*.

