

Lo scopo di introdurre il grafico di densità è di semplificare la notazione e il calcolo delle casuali discrete. Dopo che una funzione di densità è stata determinata, non è più necessario calcolare le probabilità degli eventi riguardanti una variabile casuale sommando le probabilità dei punti campione come nella (1), si possono invece considerare i punti dell'asse x dove $f(x) > 0$, come i punti di un nuovo spazio campione discreto con le probabilità date dai valori della $f(x)$ calcolata in quei punti. Per esempio se la variabile X rappresenta la somma dei punti nel getto di 2 dadi il nuovo spazio campione consisterà degli 11 punti $2, 3, \dots, 12$ e le probabilità associate a quei punti saranno i valori della $f(x)$ calcolati in precedenza. Questo nuovo spazio campione è mostrato in figura 2:



Ora consideriamo il calcolo della probabilità dell'evento $X \in R$ dove R è dato da un insieme di punti sull'asse x e $X \in R$ rappresenta l'evento che la variabile X assuma valori in R . Considerando il nuovo spazio campione generato da X e dalla $f(x)$ una diretta applicazione della formula già vista cioè $P\{A\} = \sum_A p_i$ fornisce il risultato :

$$(2) P\{X \in R\} = \sum_{x \in R} f(x)$$

dove la sommatoria viene fatta su quei valori $x \in R$ per i quali $f(x) > 0$.

Il calcolo di questa probabilità come indicato è di solito più semplice del calcolo che si basa sullo spazio campione originario dell'esperimento. Usando nuovamente l'esempio del getto di 2 dadi, supponiamo di voler calcolare la probabilità che la somma dei punti sia maggiore di 7.

Considerando il nuovo spazio campione mostrato in figura 2, questa probabilità è data da

$$P\{X > 7\} = \sum_{x=8}^{12} f(x) = f(8) + f(9) + \dots + f(12) = \frac{5}{36} + \dots + \frac{1}{36} = \frac{15}{36}.$$

Se questa probabilità si dovesse calcolare usando lo spazio campione originario sarebbe necessario sommare le probabilità dei 15 punti campione le cui coordinate hanno come somma un valore

maggiore di 7, cioè $P\{X > 7\} = \sum_{X>7} p_i = \frac{1}{36} + \dots + \frac{1}{36} = \frac{15}{36}$. In questo caso, in effetti, non c'è

un vantaggio particolare ad usare il nuovo spazio campione, però per spazi campione più complicati il vantaggio può essere considerevole.

Funzione di distribuzione, o di distribuzione cumulativa, o di ripartizione

Una funzione strettamente affine alla funzione di densità f , è la corrispondente funzione di distribuzione o di distribuzione cumulativa, o di ripartizione F .

Essa è definita come segue: $F(x) := P\{X \leq x\} = \sum_{t \leq x} f(t)$

dove la sommatoria viene fatta su tutti i valori della variabile casuale discreta che sono $\leq x$. Il grafico della $F(x)$ corrispondente alla $f(x)$ della figura 1 vista l'ultima volta è riportato nella figura seguente. Per costruirlo occorre calcolare il valore assunto dalla $F(x)$ negli 11 punti $x = 2, 3, \dots, 12$. Si ha che

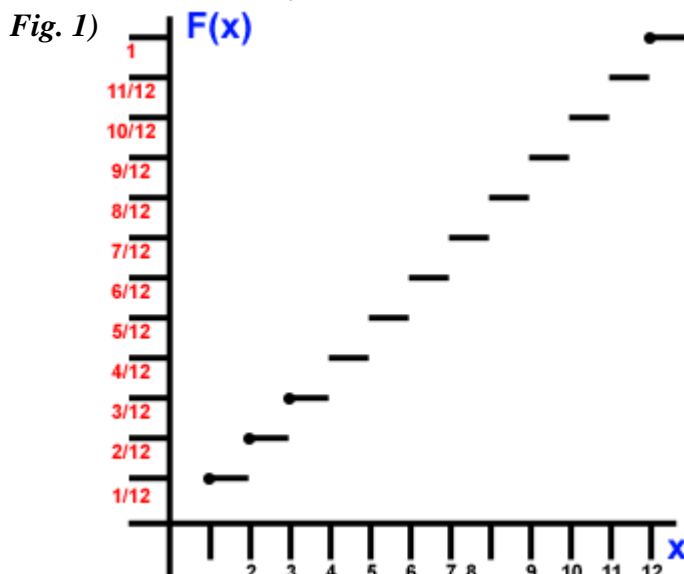
$$F(2) = P\{X \leq 2\} = \sum_{t \leq 2} f(t) = f(2) = \frac{1}{36}$$

$$F(3) = P\{X \leq 3\} = \sum_{t \leq 3} f(t) = f(2) + f(3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

.....



$$F(12) = P\{X \leq 12\} = \sum_{t \leq 12} f(t) = f(2) + f(3) + \dots + f(12) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \dots + \frac{1}{36} = 1$$



Si fa notare che i punti in grassetto all'inizio di ciascun segmento di retta stanno a significare che il valore di $F(x)$, per x intero, è quello corrispondente alla riga orizzontale superiore anziché inferiore.

Funzione di probabilità congiunta o funzione di densità di probabilità congiunta

Molti esperimenti implicano parecchie variabili casuali, anziché soltanto una. Per semplicità consideriamo 2 variabili casuali discrete X, Y .

Un modello matematico per queste due variabili è una funzione che da la probabilità che la variabile X assuma uno specifico valore x e contemporaneamente Y assuma uno specifico valore y .

Si può dare allora la seguente **Definizione**:

Siano X e Y due variabili casuali discrete, allora la funzione f definita dalla

$f(x, y) := P\{X = x, Y = y\}$ viene chiamata la funzione di probabilità congiunta o la funzione di densità di probabilità congiunta delle variabili X e Y se soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} f(x, y) \geq 0 \\ \sum_x \sum_y f(x, y) = 1 \end{cases}$$

L'aggettivo congiunta spesso si omette perché non è possibile confondere una funzione di 2 variabili con una funzione di una sola variabile.

Consideriamo l'esempio in cui la variabile X rappresenta il numero di carte di picche ottenute quando si estrae una prima carta da un mazzo, e la variabile Y rappresenta il numero di carte di picche ottenute quando si estrae una seconda carta dal mazzo senza che la prima carta sia stata reinserita. In questo caso le variabili X, Y possono assumere soltanto i valori 0 e 1.

Allora, ricordando la regola di moltiplicazione delle probabilità $P\{A_1 \cup A_2\} = P\{A_1\}P\{A_2 | A_1\}$, la funzione di densità $f(x, y)$ è definita dalla seguente tabella di valori:

$$f(0,0) = P\{X = 0, Y = 0\} = P\{X = 0\}P\{Y = 0 | X = 0\} = \frac{39}{52} * \frac{38}{51} = 0.56$$

$$f(0,1) = P\{X = 0, Y = 1\} = P\{X = 0\}P\{Y = 1 | X = 0\} = \frac{39}{52} * \frac{13}{51} = 0.19$$

$$f(1,0) = P\{X = 1, Y = 0\} = P\{X = 1\}P\{Y = 0 | X = 1\} = \frac{13}{52} * \frac{39}{51} = 0.19$$



$$f(1,1) = P\{X = 1, Y = 1\} = P\{X = 1\}P\{Y = 1 | X = 1\} = \frac{13}{52} * \frac{12}{51} = 0.06$$

Una funzione di densità di probabilità congiunta si può usare per calcolare le probabilità delle variabili casuali discrete X, Y sommando la $f(x, y)$ sopra opportuni valori delle due variabili, proprio come le probabilità della variabile casuale discreta X si calcolano sommando la $f(x)$ sopra opportuni valori della variabile X .

Come nel problema monodimensionale, è conveniente operare in un nuovo spazio campione rispetto a quello originario che consiste dei punti del piano x, y dove $f(x, y) > 0$ e le cui probabilità sono i valori forniti dalla $f(x, y)$.

