

Le formule (4) e (5) viste in precedenza sono utili nel descrivere gli esperimenti che procedono in 2 fasi, e hanno la proprietà che il meccanismo di casualità della seconda fase, è determinato dal risultato della prima fase dell'esperimento.

Questi esperimenti sono anche chiamati **esperimenti composti**. Nell'applicazione delle formule precedenti agli esperimenti composti  $H_i$  rappresentano i possibili risultati della prima fase dell'esperimento e  $P\{A | H_i\}$  descrive il meccanismo di aleatorietà della seconda fase sotto l'ipotesi che  $H_i$  si sia verificato nella prima fase.

Le probabilità  $P\{H_i\}$  sono anche dette **probabilità a priori**, mentre le probabilità condizionate  $P\{H_i | A\}$  sono chiamate anche **probabilità a posteriori**. Queste denominazioni derivano dal fatto che in certe applicazioni  $P\{H_i\}$  sono **probabilità soggettive** che rappresentano la nostra opinione prima che sia stato eseguito l'esperimento, mentre le probabilità  $P\{H_i | A\}$  si possono considerare come la descrizione della nostra opinione dopo che sono stati effettuati alcuni esperimenti e si è verificato l'evento  $A$ .

In altre parole la *formula di Bayes* può essere considerata anche come un algoritmo per cambiare la nostra opinione sulla base di risultati sperimentali. Questo aspetto verrà illustrato fra poco esaminando un esempio specifico.

### Esercitazione

Consideriamo ora alcuni esempi come applicazione pratica delle formule (4) e (5) viste prima.

#### **Esempio 1**

Per illustrare l'uso diretto della *formula di Bayes* risolviamo ora il problema considerato ieri per introdurre il calcolo della probabilità delle cause. A tale scopo indichiamo gli eventi con

$H_1 \rightarrow$  scelta della I° scatola                       $A \rightarrow$  estrarre la pallina rossa

$H_2 \rightarrow$  scelta della II° scatola

Poiché una scatola viene scelta a caso  $P\{H_1\} = P\{H_2\} = \frac{1}{2}$ , inoltre è chiaro dai contenuti delle due

scatole che  $P\{A | H_1\} = 1$ ,  $P\{A | H_2\} = \frac{1}{2}$ .

L'applicazione diretta della *formula di Bayes* fornisce allora

$$P\{H_1 | A\} = \frac{P\{H_1\}P\{A | H_1\}}{P\{H_1\}P\{A | H_1\} + P\{H_2\}P\{A | H_2\}} = \frac{\frac{1}{2} * 1}{\frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} * \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

#### **Esempio 2**

In una diagnosi medica si osserva che un paziente ha uno o più sintomi specifici  $A = \{S_1, S_2, \dots, S_l\}$  e si pone il problema di decidere quale delle possibili malattie  $\{H_1, H_2, \dots, H_k\}$  sia la causa più probabile dei sintomi osservati. Si suppone di avere una stima statistica delle probabilità  $P\{H_i\} = P_i$  con  $P_i > 0$  per  $i = 1, 2, \dots, k$  di contrarre la malattia  $H_i$ . Si suppone anche che le singole malattie non siano presenti tutte contemporaneamente nella stessa persona. Infine si suppone di conoscere una stima statistica della probabilità condizionata  $P\{A | H_i\}$ , cioè della probabilità che la malattia  $H_i$  dia origine ai sintomi  $A$ .

Applicando la *formula di Bayes* la probabilità che i sintomi  $A$  siano dovuti alla malattia  $H_i$  per  $i = 1, 2, \dots, k$ , o in altre parole la probabilità che un paziente con uno o più sintomi  $A$  abbia la malattia  $H_i$  è data dalla (5) vista in precedenza.



Come esempio supponiamo che  $P\{H_1\} = 0.40$ ,  $P\{H_2\} = 0.25$ ,  $P\{H_3\} = 0.35$  ed inoltre

$$P\{A | H_1\} = 0.8, P\{A | H_2\} = 0.6, P\{A | H_3\} = 0.9$$

Dalla (4) vista in precedenza si ha che  $P\{A\} = 0.40 * 0.8 + 0.25 * 0.60 + 0.35 * 0.9 = 0.785$

Si ha quindi che, applicando la (5):

$$P\{H_1 | A\} = \frac{0.40 * 0.8}{0.785} = 0.4076 = 40.76\% \quad P\{H_2 | A\} = \frac{0.25 * 0.6}{0.785} = 0.1911 = 19.11\%$$

$$P\{H_3 | A\} = \frac{0.35 * 0.9}{0.785} = 0.4013 = 40.13\%$$

Ne segue che un paziente che presenta uno o più sintomi A ha con maggiore probabilità contratto la malattia  $H_1$ , e in assenza di ulteriori informazioni dovrà essere curato per tale malattia.

### Esempio 3

Supponiamo che il ministro delle finanze prima di adottare una nuova politica di controllo dei prezzi e dei salari, chieda il parere di tre esperti, indicati rispettivamente con  $H_1, H_2, H_3$ , sull'impatto che tale politica può avere sul tasso di disoccupazione. Le risposte date dai singoli esperti in termini di probabilità sono raccolte nella tabella seguente:

Esperto	Diminuzione (D)	Stabilità (S)	Aumento (A)
$H_1$	0.1	0.1	0.8
$H_2$	0.6	0.2	0.2
$H_3$	0.2	0.6	0.2

**Tab.1** Probabilità di cambiamento del tasso di disoccupazione

In base ad esperienze passate il ministro si è fatto l'opinione che la probabilità che ogni esperto abbia una teoria corretta dell'economia sono date rispettivamente da:

$$P\{H_1\} = \frac{1}{6}, P\{H_2\} = \frac{1}{3}, P\{H_3\} = \frac{1}{2}$$

Supponendo che a seguito della politica adottata si abbia un aumento del tasso di disoccupazione si vuole indicare come dovrebbero essere modificate le opinioni del ministro sulla correttezza della teoria economica di ogni singolo esperto.

A tale scopo indichiamo da prima come si può calcolare la probabilità di un incremento del tasso di disoccupazione mediante l'applicazione della formula (4) vista in precedenza, si ha che la probabilità dell'aumento del tasso di disoccupazione:

$$P\{A\} = P\{H_1\}P\{A | H_1\} + P\{H_2\}P\{A | H_2\} + P\{H_3\}P\{A | H_3\} = \frac{1}{6} * 0.8 + \frac{1}{3} * 0.2 + \frac{1}{2} * 0.2 = 0.3$$

Applicando la formula di Bayes si ottiene :

$$P\{H_1 | A\} = \frac{P\{H_1\}P\{A | H_1\}}{P\{A\}} = \frac{\frac{1}{6} * 0.8}{0.3} = 0.\bar{4}$$

$$P\{H_2 | A\} = \frac{P\{H_2\}P\{A | H_2\}}{P\{A\}} = \frac{\frac{1}{3} * 0.2}{0.3} = 0.\bar{2}$$

$$P\{H_3 | A\} = \frac{P\{H_3\}P\{A | H_3\}}{P\{A\}} = \frac{\frac{1}{2} * 0.2}{0.3} = 0.\bar{3}$$

Si vede che la teoria dell'esperto  $H_1$ , la meno corretta secondo il ministro prima che la politica venisse adottata, appare a seguito della politica adottata la più corretta.

