

Variabili casuali o aleatorie

Diciamo subito che l'aggettivo aleatorio significa che “*dipende dal caso*”, “*dalla sorte*” in quanto deriva dal latino *alea* che significa gioco dei dadi, rischio.

Consideriamo lo spazio campione mostrato in precedenza e corrispondente all'esperimento del lancio di due monete, e fissiamo l'attenzione sul numero totale delle teste ottenute.

Per calcolare la probabilità dei possibili risultati è conveniente introdurre una variabile X per rappresentare il numero di teste ottenute.

Allora X assumerà il valore 0 nel punto (CC) *croce croce*, il valore 1 nei due punti (TC, CT) e il valore 2 nel punto (TT). Una variabile come questa a valori numerici è un esempio di variabile casuale.

Come II° esempio riguardante l'esperimento del getto di due dadi se la variabile X rappresenta la somma dei punti ottenuti nel getto di 2 dadi allora essa è una variabile casuale che può assumere i valori interi fra 2 e 12.

Come altro esempio se la variabile X indica la distanza dal centro di una freccia scagliata su di un bersaglio circolare di raggio uguale a 20 cm, allora, assumendo di trascurare tutti i colpi mancanti, X è una variabile casuale che può assumere qualsiasi valore fra 0 e 20.

In tutti questi esempi la variabile X è valutata numericamente ed il suo valore dipende dal punto campione, così X in effetti è una funzione il cui dominio di definizione è rappresentato dall'insieme dei punti dello spazio campione e il cui insieme di valori cioè il suo codominio è un insieme di numeri reali. Si può dare allora la seguente **definizione** :

Una variabile casuale X è una funzione a valori reali definita su di uno spazio campione.

Il motivo per cui la variabile X viene chiamata casuale è che essa è definita su di uno spazio campione associato ad un esperimento fisico il cui risultato è incerto cioè dipende dal caso.

L'obiettivo che ora ci si propone è quello di studiare le variabili casuali, e di calcolare le probabilità ad esse associate. A tale scopo è necessario assegnare una misura della probabilità allo spazio campione associato con la variabile casuale. Perciò si assume che a qualsiasi spazio campione sia assegnata una misura della probabilità.

VARIABILI CASUALI DISCRETE

Dopo che una variabile casuale X è stata definita su di uno spazio campione, l'interesse si concentra di solito nel determinare la probabilità che X assuma valori specifici nel suo insieme di valori possibili. Per esempio se X rappresenta la somma dei punti nel gettare 2 dadi, allora può interessare il calcolo che X assuma ad esempio il valore 7. Oppure se X rappresenta la distanza di una freccia dal centro di un bersaglio circolare, può interessare calcolare la probabilità che X sia minore di 5.

Il calcolo di $P\{X = 7\}$ nel primo esempio è molto più semplice del calcolo di $P\{X < 5\}$ nel secondo, perché è molto più semplice lavorare con uno spazio campione che consiste di un numero finito di punti piuttosto che con uno che consiste di un intervallo di punti sull'asse x .

Uno spazio campione che consiste di un numero finito o di una successione infinita di punti è chiamato uno **spazio campione discreto**, mentre uno che consiste di uno o più intervalli di punti, viene chiamato uno **spazio campione continuo**. Per intervalli si intendono naturalmente, intervalli di dimensione qualsiasi.

Poiché la teoria per gli spazi campione discreti è molto più semplice di quella per gli spazi continui, limiteremo per ora la discussione agli spazi campione discreti.

Una variabile casuale non può assumere più valori di quanti sono i punti dello spazio campione, perciò una variabile definita su di uno spazio campione discreto può assumere soltanto un numero finito o una successione infinita di valori, una variabile come questa si chiama una **variabile casuale discreta**.

Per calcolare le probabilità delle variabili casuali discrete, ricordiamo la formula per calcolare la probabilità di un evento A data dalla $P\{A\} = \sum_A p_i$ ricavata assumendo che lo spazio campione



fosse discreto e quindi applicabile a qualsiasi spazio campione discreto. Se x rappresenta un dato valore della variabile casuale discreta X , questa formula si può usare per calcolare la probabilità che X assuma il valore x . Questa probabilità è perciò data dalla:

$$(I) P\{X = x\} = \sum_{X=x} p_i$$

dove la sommatoria viene fatta su tutti i punti campione in cui la variabile casuale X ha il valore x . Come esempio, se la variabile X rappresenta la somma dei punti ottenuta nel getto di due dadi, tenuto conto che tutti i punti campione hanno probabilità uguale a $1/36$, allora

$$P\{X = 7\} = \sum_{X=7} p_i = \frac{6}{36} \text{ perché vi sono 6 punti campione in cui il valore di } X=7 \text{ e precisamente i punti di coordinate } (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1).$$

FUNZIONE DI PROBABILITA' O FUNZIONE DI DENSITA' DI PROBABILITA'

Per calcolare le probabilità delle variabili casuali discrete è conveniente introdurre una funzione chiamata *funzione di probabilità* o *funzione di densità di probabilità* o ancora più brevemente *densità*. Si può dare la seguente definizione:

Definizione

Si X una variabile casuale discreta, allora la funzione f definita dalla $f(x) := P\{X = x\}$ (:= vuol dire uguale per definizione) viene chiamata la funzione di probabilità o la funzione di densità di probabilità della variabile X se soddisfa le seguenti proprietà:

- $f(x) \geq 0$
- $\sum_x f(x) = 1$

Si fa notare che in genere si parla di densità riferendosi ad esempio ad una distribuzione continua di massa lungo una retta o in un piano ecc. e che perciò il suo uso a proposito di una distribuzione di probabilità discreta potrebbe sembrare improprio. Tuttavia poiché è desiderabile usare la stessa terminologia per questo tipo di funzione sia per le variabili discrete che per le variabili continue e poiché il termine densità è appropriato per le variabili continue esso verrà usato anche nel caso discreto.

Una funzione di densità discreta spesso consiste semplicemente di una tabella di valori, così nel lancio di 2 monete, se la variabile X rappresenta il numero delle teste ottenute, la funzione di densità discreta si può definire per mezzo della seguente tabella di valori:

$$f(0) = P\{X = 0\} = \sum_{X=0} p_i = \frac{1}{4} \quad \text{probabilità di ottenere 0 teste (C,C)}$$

$$f(1) = P\{X = 1\} = \sum_{X=1} p_i = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{probabilità di ottenere una testa (T,C) (C,T)}$$

$$f(2) = P\{X = 2\} = \sum_{X=2} p_i = \frac{1}{4} \quad \text{probabilità di ottenere due teste (T,T)}$$

assumiamo inoltre che la funzione $f(x) = 0$ per $x \neq 0, 1, 2$.

Per giudicare come si distribuisce una variabile casuale, cioè come la sua probabilità varia al variare del valore della variabile, è utile tracciare il grafico della funzione densità per mezzo di un grafico a segmenti come esempio di un tale grafico la variabile x rappresenti la somma dei punti nel getto di 2 dadi. Attribuendo l'esatto valore di X a ciascuno dei 36 punti dello spazio campione corrispondenti al getto di 2 dadi e assumendo probabilità uguali per tutti i punti campione, mediante l'impiego della formula (I) si ottiene:

$$f(2) = f(12) = 1/36$$

$$f(3) = f(11) = 2/36$$

$$f(4) = f(10) = 3/36$$

$$f(5) = f(9) = 4/36$$



$$f(6) = f(8) = 5/36$$

$$f(7) = f(7) = 6/36$$

Il grafico a segmenti della $f(x)$ è mostrato in figura 1:

Fig.1)

