

Funzione di distribuzione o di distribuzione cumulative, o di ripartizione

La funzione di distribuzione o di distribuzione cumulativa o di ripartizione della variabile casuale continua X è definita dalla

$$(1) F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

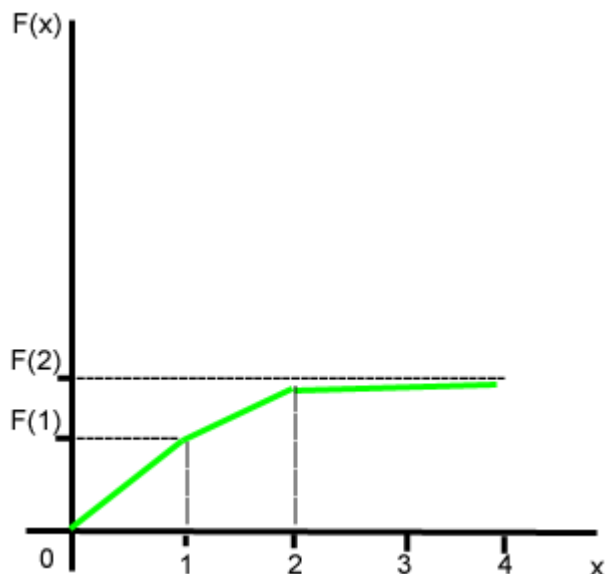
Come esempio si può ricavare dalla (1) la $F(x)$ corrispondente alla funzione di densità dell'esempio

precedente. Si ha che

$$\begin{cases} F(x) = \int_0^x e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^x = 1 - e^{-x}, x \geq 0 \\ F(x) = \int_0^x e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^x = 0, x < 0 \end{cases}$$

Il grafico della $F(x)$ è mostrato in figura 2

Fig 2)



Si fa notare ora che $P\{1 < x < 2\} = F(2) - F(1)$ infatti

$$F(2) - F(1) = 1 - e^{-2} - (1 - e^{-1}) = -e^{-2} + e^{-1} \approx 0.23$$

La funzione di densità di probabilità è quella più comunemente usata nelle applicazioni della teoria statistica, ma anche la funzione di distribuzione è molto utile nel ricavare parte di quella teoria. A volte è più facile trovare la funzione di distribuzione di una variabile casuale anziché la sua funzione di densità. In questi casi la funzione di densità si può ricavare derivando la funzione di

distribuzione per il teorema fondamentale del calcolo differenziale, cioè $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ purché $f(x)$ sia una funzione continua.

Considerando l'esempio appena trattato si può infatti verificare che *derivando la funzione di distribuzione si ottiene la corrispondente funzione di densità*, infatti

$$\begin{cases} \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(1 - e^{-x}) = e^{-x}, x \geq 0 \\ \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(1 - e^{-x}) = 0, x < 0 \end{cases}$$



Funzione di densità congiunta continua

Una funzione di densità di una o più variabili casuali continue è la naturale generalizzazione di una funzione di densità di una variabile, così una funzione di densità di due variabili casuali continue X, Y si indica con $f(x, y)$ e come è noto è rappresentata geometricamente da una superficie in tre dimensioni, cioè dalla superficie $z = f(x, y)$, proprio come una funzione di densità $f(x)$ è rappresentata da una curva in due dimensioni cioè dalla curva $y = f(x)$.

Se gli integrali della funzione $f(x, y)$ devono fornire probabilità è necessario che il volume totale sotteso da questa superficie sia uguale a 1 e che il volume sotteso da questa superficie e che giace sopra una regione R nel piano x, y dia la probabilità che le variabili casuali X e Y assumano valori che corrispondono ad un punto interno a questa regione.

Queste proprietà essenziali per una funzione di densità di due variabili si possono formalizzare come segue:

Definizione

Una funzione di densità congiunta di due variabili casuali continue X, Y è una funzione f che possiede le seguenti proprietà:

1) $f(x, y) \geq 0$

2)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

3)
$$\iint_R f(x, y) dx dy = P\{X, Y \in R\}, \forall R$$

Si fa l'ipotesi che la regione R sia tale che l'integrale della $f(x, y)$ su quella regione esista.

Molto spesso la regione R sarà un rettangolo del tipo $a < x < b, c < y < d$, nel qual caso la terza condizione diventa

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = P\{a < X < b, c < Y < d\}$$

Esempio

Come esempio di funzione di densità di due variabili casuali continue, consideriamo la funzione

$f(x, y) = e^{-(x+y)}$ che è una generalizzazione della funzione dell'esempio precedente.

Se la $f(x, y)$ si definisce nulla per valori negativi di x o y ed è data dalla $f(x, y) = e^{-(x+y)}$ per $x, y \geq 0$, allora le prime due proprietà sono soddisfatte

$$\begin{cases} f(x, y) = e^{-(x+y)}, x, y \geq 0 \\ f(x, y) = 0, (x \text{ o } y) < 0 \end{cases}$$

infatti $f(x, y) \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)} dy dx &\Rightarrow \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-y} dy dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\int_0^{+\infty} e^{-y} dy \right) dx \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x} \left[-e^{-y} \right]_0^{+\infty} dx \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x} (0+1) dx = 1 \end{aligned}$$



Si ha allora ad esempio che la probabilità

$$\begin{aligned}
 P\{1 < X < 2, 0 < Y < 2\} &= \int_1^2 \int_0^2 e^{-(x+y)} dy dx \Rightarrow \int_1^2 \int_0^2 e^{-x} e^{-y} dy dx \Rightarrow \int_1^2 e^{-x} \left\{ \int_0^2 e^{-y} dy \right\} dx \\
 &\Rightarrow \int_1^2 e^{-x} \left[-e^{-y} \right]_0^2 dx \Rightarrow \int_1^2 e^{-x} (-e^{-2} + 1) dx \Rightarrow (1 - e^{-2}) \int_1^2 e^{-x} dx \Rightarrow (1 - e^{-2}) \left[-e^{-x} \right]_1^2 \\
 &\Rightarrow (1 - e^{-2}) \left[-e^{-2} + e^{-1} \right] \Rightarrow (1 - e^{-2})(-e^{-2} + e^{-1}) \approx 0.20
 \end{aligned}$$

Il grafico di questa funzione e la rappresentazione della probabilità $P\{1 < X < 2, 0 < Y < 2\}$ è mostrato nella figura seguente.

Fig 3

Due o più variabili casuali continue che sono senza rapporti, in senso probabilistico, si dicono indipendenti proprio come nel caso delle variabili discrete. La definizione di indipendenza, data nel caso delle variabili discrete, si può dimostrare che vale anche nel caso delle variabili continue. Ci occuperemo fra poco di alcune distribuzioni di probabilità sia di variabili discrete che di variabili continue, che nella realtà si sono dimostrate modelli particolarmente utili. In ciascun caso la distribuzione sarà specificata presentando la funzione di densità.

In molti problemi però è sufficiente conoscere soltanto alcune caratteristiche o proprietà di una distribuzione, anziché studiare l'intera distribuzione e in particolare è spesso sufficiente conoscere i cosiddetti momenti di ordine basso di una distribuzione. Ci occuperemo quindi dei momenti di particolari distribuzioni come pure delle loro funzioni di densità.

Variabili Discrete

La maggior parte delle variabili discrete che ricorrono negli esperimenti di tipo ripetitivo sono di tipo conteggio, come ad esempio il numero di incidenti che un automobilista ha ogni anno, il numero di insetti che sopravvivono ad una irrorazione, ed altre ancora.

Queste variabili possono assumere soltanto valori interi non negativi. Sebbene le variabili discrete che presenteremo siano di tipo conteggio, impiegheremo una notazione sufficientemente generale da comprendere anche altri tipi di variabili casuali discrete.

Valore atteso

Prima di considerare specifiche funzioni di densità di variabili discrete, ci occuperemo dei momenti di una distribuzione di probabilità, così da poter calcolare i momenti di quelle particolari distribuzioni. Ancora prima però introdurremo e definiremo un concetto più generale e cioè quello di *valore atteso poiché i momenti saranno casi particolari del valore atteso*, il valore atteso è inoltre uno strumento molto utile per studiare altre proprietà di una distribuzione.

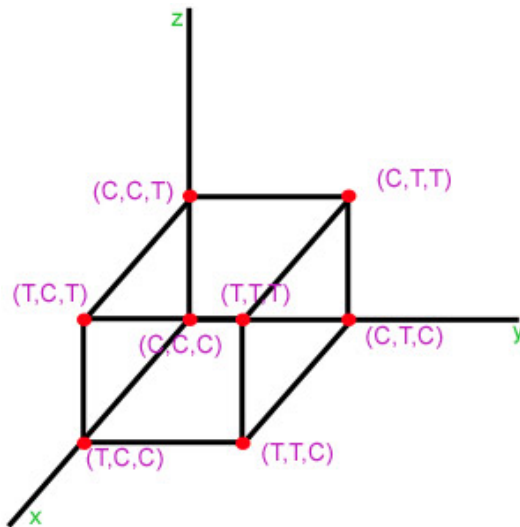
Come esempio per illustrare il concetto generale di valore atteso consideriamo un gioco in cui si lanciano 3 monete e si vince un dollaro per ogni testa che esce. Se la variabile X indica la somma vinta allora essa può assumere soltanto i valori $X \rightarrow 0, 1, 2, 3$ cui corrispondono le probabilità

$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$, queste probabilità risultano evidenti se si considera lo spazio campione di questo

esperimento mostrato nella figura 1



Fig 1)



$$P\{X = x\} = \sum_{X=x} P_i$$

Ci si dovrebbe aspettare perciò di vincere $0\$ \frac{1}{8}$ di volte, $1\$ \frac{3}{8}$, $2\$ \frac{3}{8}$, $3\$ \frac{1}{8}$ di volte, se il gioco venisse fatto un gran numero di volte. Ci si dovrebbe perciò aspettare di vincere in media la somma seguente: $0 * \frac{1}{8} + 1 * \frac{3}{8} + 2 * \frac{3}{8} + 3 * \frac{1}{8} = 1.5\$$, questa somma, cioè 1.5\$, è ciò che ci si dovrebbe aspettare di vincere.

