

Variabili casuali continue - Momenti e valore atteso

Prima di presentare alcune utili distribuzioni di variabili casuali continue definiamo il momento di ordine k di una variabile di questo tipo.

Sia $f(x)$ la funzione di densità di una variabile casuale continua X che è nulla esternamente ad un intervallo finito $[a, b]$ allora

Definizione

Il momento d'ordine k dall'origine della distribuzione della variabile casuale continua X , la cui densità è f , è dato da

$$(1) \mu_k' = \int_a^b x^k f(x) dx$$

Per analogia con la definizione data per una variabile discreta, il momento d'ordine k dalla media indicato con μ_k si ottiene sostituendo x^k con $(x - \mu)^k$ nel precedente integrale cioè

$$(2) \mu_k = \int_a^b (\mu - x)^k f(x) dx$$

Come nel caso delle variabili discrete è desiderabile introdurre il concetto generale di valore atteso e trattare i momenti come casi particolari del valore atteso. La definizione richiesta segue dall'analogia con quella data per le variabili discrete ed è la seguente:

Definizione

Il valore atteso della funzione $g(X)$ della variabile casuale continua X , la cui densità è f , è dato da

$$(3) E[g(X)] = \int_a^b g(x) f(x) dx$$

Sebbene per le definizioni dei momenti e del valore atteso la $f(x)$ sia stata considerata nulla esternamente all'intervallo $[a, b]$, non c'è nessun motivo per mantenere questa limitazione, così più in generale a può essere uguale a $-\infty$ e b può essere uguale a $+\infty$.

Poiché l'operatore valore atteso E è stato progettato per fornire valori medi di variabili casuali, nasce spontanea la domanda se il valore atteso di una funzione $g(X)$ di una variabile X sia realmente il valore atteso di quella funzione.

Indichiamo con Y la variabile casuale $g(X)$ ovvero $Y = g(X)$, allora, conoscendo la funzione di densità $f(x)$ di X , è teoricamente possibile ricavare la funzione di densità $h(y)$ di Y . Il valore atteso di $g(X)$ è ovviamente lo stesso del valore atteso di Y , perciò se $h(y)$ è disponibile allora il valore atteso di Y si

$$\text{può esprimere nella forma } E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y h(y) dy.$$

Usando tecniche di calcolo con cambiamento di variabile, si può dimostrare che questo valore è lo

$$\text{stesso del valore dato dalla formula } E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx, \text{ il vantaggio di quest'ultima sta nel}$$

fatto che essa non richiede di trovare la funzione di densità $h(y)$ dalla conoscenza della $f(x)$ prima di poter calcolare il valore atteso di $Y = g(X)$.



Funzione generatrice dei momenti

La funzione generatrice dei momenti di una variabile casuale continua X è definita per analogie col caso discreto dalla

$$(4) M_X(\vartheta) = E\left[e^{\vartheta X}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\vartheta x} f(x) dx$$

Se $e^{\vartheta x}$ si sviluppa in serie di potenze e si compie l'integrazione termine a termine, si trova che $M_X(\vartheta)$ assumerà la stessa forma estesa già vista per le variabili discrete e precisamente

$$M_X(\vartheta) = 1 + \frac{\vartheta}{1!} \mu_1' + \frac{\vartheta^2}{2!} \mu_2' + \dots + \frac{\vartheta^k}{k!} \mu_k' + \dots, \text{ quindi la (4) genera momenti allo stesso modo}$$

come fa l'analoga per le variabili discrete.

Per poter generare i momenti di una funzione $g(X)$ di una variabile casuale continua X è necessario generalizzare la definizione di funzione generatrice dei momenti, dal modo in cui $M_X(\vartheta)$ genera i

momenti è chiaro che i momenti di $g(X)$ saranno generati sostituendo nella (4) $e^{\vartheta x}$ con $e^{\vartheta g(x)}$ la definizione è la seguente:

Definizione

La funzione generatrice dei momenti della funzione $g(X)$ della variabile casuale continua X , la cui funzione di densità è f , è data da

$$(5) M_{g(X)}(\vartheta) = E\left[e^{\vartheta g(X)}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\vartheta g(x)} f(x) dx$$

La (2) rappresenta la forma generalizzata della funzione generatrice dei momenti.

Proprietà

Consideriamo ora due interessanti proprietà delle funzioni generatrici dei momenti.

Sia c è una costante ed $h(X)$ è una funzione della variabile X per la quale la funzione generatrice dei momenti esiste, allora poiché $g(X)$ nella (2) è una funzione arbitraria, scegliendo $g(X) = c * h(X)$,

$$\text{si ottiene } M_{ch(X)}(\vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\vartheta ch(X)} f(x) dx = M_{h(X)}(c\vartheta).$$

Scegliendo ora nella (5) $g(X) = h(X) + c$ si ha che

$$M_{h(X)+c}(\vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{[\vartheta h(x)+c]} f(x) dx = e^{\vartheta c} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\vartheta h(x)} f(x) dx = e^{\vartheta c} M_{h(X)}(\vartheta)$$

Sostituendo ora $h(X)$ con $g(X)$ nelle formule precedenti si possono formulare le seguenti due importanti proprietà.

Se c è una costante qualsiasi e $g(X)$ è una funzione qualsiasi per cui la funzione generatrice dei momenti esiste, allora

$$I) M_{cg(X)}(\vartheta) = M_{g(X)}(c\vartheta)$$

$$II) M_{g(X)+c}(\vartheta) = e^{\vartheta c} M_{g(X)}(\vartheta)$$

Queste due proprietà ci permettono di disporre nel modo indicato di una costante c che moltiplica o è aggiunta a una funzione $g(X)$, sostituendo integrali con somme si dimostra facilmente che queste formule si applicano anche alle variabili discrete.

Si fa l'ipotesi che $g(x)$ e $f(x)$ siano tali che l'integrale nella (5) risulti finito.



Distribuzione rettangolare o uniforme

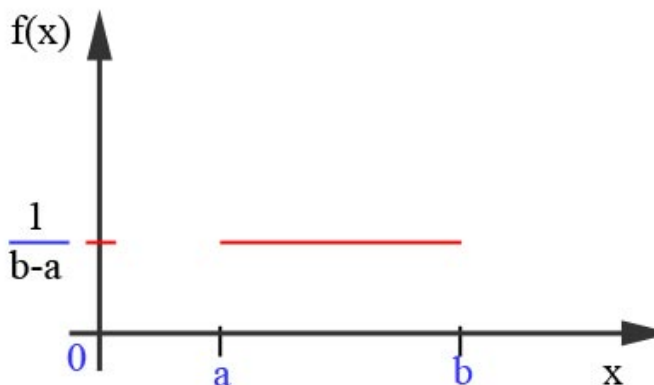
Forse la più semplice distribuzione di probabilità di una variabile casuale continua è la distribuzione rettangolare uniforme.

Essa è definita come segue :

$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Il grafico di una tipica distribuzione rettangolare è illustrato nella figura seguente

Fig. 1)



Il momento d'ordine k dall'origine è facile da calcolare, per semplicità se $a = 0, b = 1$ allora

$$\mu'_k = \int_0^1 x^k d(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{k+1}.$$

Anche la funzione generatrice dei momenti si calcola facilmente, infatti

$$M_X(g) = \int_0^1 e^{gx} d(x) = \frac{1}{g} e^{gx} \Big|_0^1 = \frac{1}{g} (e^g - 1).$$

Sviluppando e^g in serie di potenze si ottiene

$$M_X(g) = \frac{1}{g} \left(1 + \frac{g}{1!} + \frac{g^2}{2!} + \dots + \frac{g^k}{k!} + \dots - 1 \right) = 1 + \frac{g}{2!} + \frac{g^2}{3!} \dots + \frac{g^k}{(k+1)!} + \dots$$

Da cui si vede che il momento d'ordine k dall'origine, che sappiamo essere il coefficiente di $\frac{g^k}{k!}$,

$$\text{è dato da } \mu'_k = \frac{1}{k+1}$$

Il calcolo del momento d'ordine k per via indiretta è in questo caso più complicato per via diretta ed è stato fatto qui esclusivamente per acquistare familiarità con le formule introdotte per il calcolo dei momenti e non come un metodo suggerito per calcolare i momenti in questo caso, infatti qui è molto più semplice il calcolo diretto dei momenti

La distribuzione rettangolare è di uso piuttosto limitato come modello per le distribuzioni reali, comunque essa è di considerevole valore teorico ed è la distribuzione più semplice di una variabile casuale continua su cui applicare le formule generali.

