

La funzione di densità binomiale è un esempio di modello matematico che si può applicare a molti problemi reali che implicano una variabile discreta. In qualsiasi applicazione è comunque necessario conoscere o stimare il valore del parametro  $p$  prima di poter usare la funzione di densità binomiale.

### Esercitazione

Come esempio di applicazione della funzione di densità binomiale consideriamo l'esperimento del getto di un dado e si voglia calcolare la probabilità che se il dado viene gettato 5 volte due gettate presentino come risultato 1.

In questo caso il successo consiste nell'ottenere come risultato 1, qui si ha inoltre che  $p = \frac{1}{6}$ ,

$$q = 1 - p = \frac{5}{6}, \quad n = 5.$$

Applicando la funzione di densità binomiale si ottiene che  $P\{X = 2\} = \frac{5!}{2!(5-2)!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.16$

Si voglia inoltre calcolare la probabilità che al massimo 2 gettate presentino come risultato 1, per rispondere a questa domanda occorre calcolare la probabilità di nessun 1, un 1, e due 1, probabilità quest'ultima che è già stata calcolata.

Applicando la funzione di densità binomiale si ha quindi che  $f(0) = \frac{5!}{0!5!} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.40$

$$\text{e } f(1) = \frac{5!}{1!4!} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.40$$

Poiché queste 3 possibilità sono eventi reciprocamente esclusivi si ha che

$$P\{x \leq 2\} = \sum_{x=0}^2 f(x) = f(0) + f(1) + f(2) = 0.40 + 0.40 + 0.16 = 0.96 \quad 96\% \text{ è la percentuale che al massimo in due gettate si abbia 1}$$

### Esercitazione 2

Come esempio consideriamo il calcolo della probabilità di ottenere almeno 2 successi nel tirare venti colpi ad un bersaglio se la probabilità di successo in un singolo colpo è uguale a  $\frac{1}{10}$ .

In questo caso  $n=20$ ,  $p = \frac{1}{10}$ , perciò

$$P\{X \geq 2\} = 1 - f(0) - f(1) = 1 - \frac{20!}{0!20!} \left(\frac{1}{10}\right)^0 \left(\frac{9}{10}\right)^{20} - \frac{20!}{1!19!} \left(\frac{1}{10}\right)^1 \left(\frac{9}{10}\right)^{19} = 0.608$$

La validità di usare il modello binomiale in questo esempio non è così ovvia come lo è invece nell'esempio precedente. Infatti la formula binomiale è stata ricavata sulla base di esecuzioni dell'esperimento indipendenti fra loro con  $p$  costante da esecuzione a esecuzione, ma se la stessa persona tira colpi ripetuti allo stesso bersaglio ci si potrebbe aspettare che le sue probabilità di colpirlo aumentassero un po' con la pratica, se invece viene usata ogni volta una persona diversa  $p$  indubbiamente cambierebbe da prova a prova.

Quindi al momento di interpretare una probabilità risultante come quella uguale a 0.608 appena ricavata è importante prendere in considerazione le possibili deviazioni dalle ipotesi fondamentali.

### Momenti binomiali

Calcoliamo ora i primi due momenti dall'origine della distribuzione binomiale.



Per illustrare i due metodi per il calcolo dei momenti, questi momenti vengono calcolati dapprima direttamente e poi indirettamente tramite la funzione generatrice dei momenti.

Applicando la definizione alla funzione di densità binomiale espressa dalla (2) si ha che la media

$$\mu = E[X] = \sum_{x=0}^n x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^n x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^n \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

Raccogliendo ora fuori dalla sommatoria al secondo membro  $n \cdot p$  si ha che

$$\mu = np \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x} \quad \text{ponendo ora } y=x-1 \text{ si può scrivere}$$

$$(3) \quad \mu = np \sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!(n-1-y)!} p^y q^{n-1-y}$$

Ora la quantità che viene sommata al secondo membro è la probabilità binomiale di  $y$  successi in  $n-1$  esecuzioni dell'esperimento. Quando questa probabilità viene sommata su tutti i possibili valori della variabile  $y$  la somma deve essere uguale a 1, per cui si ha che  $\mu = np$

Il momento del secondo ordine dall'origine di una variabile avente una distribuzione binomiale si calcola facendo uso dell'identità  $x^2 = x(x-1) + x$  si ha infatti che

$$\mu'_2 = \sum_{x=0}^n x^2 \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^n [x(x-1) + x] \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^n x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} + \mu$$

I termini della somma all'ultimo membro per  $x=0$  ed  $x=1$  sono nulli a causa della presenza del fattore  $x(x-1)$  quindi la somma può iniziare da  $x=2$ , per cui si ha

$$\mu'_2 = \sum_{x=2}^n x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} + \mu = \sum_{x=2}^n \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} p^x q^{n-x} + \mu$$

Ora portando fuori dalla sommatoria la quantità  $n(n-1)p^2$  si ha che

Ponendo ora  $z=x-2$  si ha che

$$\mu'_2 = n(n-1)p^2 \sum_{z=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{z!(n-2-z)!} p^z q^{n-2-z} + \mu$$

La quantità che viene sommata al secondo membro è la probabilità binomiale di  $z$  successi in  $n-2$  esecuzioni, per cui la somma che viene fatta su tutti i possibili valori di  $z$  dà come risultato 1.

Si ottiene quindi che

$$(1) \quad \mu'_2 = n(n-1)p^2 + np$$

La **varianza** di una variabile binomiale si può calcolare applicando una formula già nota e cioè che

$$\sigma^2 = \mu'_2 - \mu^2 \quad \text{così facendo si ottiene che}$$

$$\sigma^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2 p^2 = -np^2 + np = np(1-p) = npq$$

Lo scarto quadratico medio di una distribuzione binomiale è quindi

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

Calcoliamo ora i primi 2 momenti dall'origine indirettamente tramite la funzione generatrice dei momenti, quest'ultima per una variabile binomiale è data dalla



$$M_x(\theta) = E[e^{\theta x}] = \sum_{x=0}^n e^{\theta x} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^n \frac{n!}{x!(n-x)!} (pe^\theta)^x q^{n-x}$$

Ma come si è visto ieri, la somma all'ultimo membro si può scrivere come un binomio elevato all'ennesima potenza e quindi si ha che

$$(2) M_x(\theta) = (q + pe^\theta)^n$$

I momenti richiesti si possono ottenere allora applicando una formula già nota e precisamente

$$\mu'_k = \left. \frac{d^k M_x(\theta)}{d\theta^k} \right|_{\theta=0}, k = 1, 2, \dots$$

Derivando 2 volte la (2) rispetto a  $\theta$  si ottiene:

$$M'_x(\theta) = n(q + pe^\theta)^{n-1} * pe^\theta = npe^\theta (q + pe^\theta)^{n-1} \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} M''_x(\theta) &= npe^\theta * (q + pe^\theta)^{n-1} + npe^\theta (n-1)(q + pe^\theta)^{n-2} * pe^\theta = \\ &= npe^\theta (q + pe^\theta)^{n-2} [q + pe^\theta + (n-1)pe^\theta] \\ &= npe^\theta (q + pe^\theta)^{n-2} (q + npe^\theta) \end{aligned}$$

Calcolando ora i valori della derivata prima e della derivata seconda in  $\theta = 0$  si ottengono rispettivamente i primi due momenti dall'origine. Si ha infatti che

$$\mu = M'_x(\theta) \Big|_{\theta=0} = np(q + p)^{n-1} = np \quad \text{perché } q = 1 - p \quad \text{e}$$

$$\mu'_2 = M''_x(\theta) \Big|_{\theta=0} = np(q + p)^{n-2} (q + np) = np(q + np)$$

sostituendo in quest'ultima espressione  $q$  con  $1-p$  si ottiene ovviamente lo stesso risultato espresso dalla (1).

Si può osservare che nel caso di una variabile binomiale i momenti sono più facili da ottenere indirettamente tramite la funzione generatrice dei momenti anziché direttamente dalla definizione.

