

Per calcolare la varianza è spesso più conveniente calcolare i primi due momenti dall'origine e poi ricavare la varianza da essi piuttosto che calcolarla direttamente dalla formula che la definisce.

Ricordando la formula che definisce la varianza ciò si può realizzare come segue:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 f(x_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 f(x_i)}_{\mu_2'} - 2\mu \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)}_{\mu} + \mu^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)}_1$$

Ricordando la formula che definisce i momenti dall'origine si può quindi scrivere che

$$\sigma^2 = \mu_2' - 2\mu\mu + \mu^2 \text{ e quindi la formula richiesta è la seguente: } \sigma^2 = \mu_2' - \mu^2$$

Funzione generatrice dei momenti

Anche se il calcolo diretto dei momenti, tramite la formula che li definisce, può essere facile e spesso conveniente essere capaci di calcolarli indirettamente servendosi di un altro metodo che ora introdurremo.

Esso implica quella che è conosciuta come la funzione *“generatrice dei momenti”*. Come sta ad indicare il nome stesso questa funzione è una funzione che genera i momenti, essa è definita come segue: **Definizione**

La funzione generatrice dei momenti della variabile casuale discreta X la cui densità è f, è data da

$$(1) M_X(\theta) = E[e^{\theta X}] = \sum_{i=1}^{\infty} e^{\theta x_i} f(x_i)$$

Questa serie è una funzione soltanto del parametro θ , ma si è messo l'indice a $M_X(\theta)$ per indicare quale variabile si sta considerando. Il parametro θ non ha qui nessun significato reale, esso si introduce semplicemente per aiutare a determinare i momenti.

Per mostrare come $M_X(\theta)$ genera i momenti facciamo l'ipotesi che la funzione di densità $f(x)$ sia tale per cui la serie della (1) converga.

Sviluppiamo ora $e^{\theta x_i}$ nella (1) in serie di potenze, e sommiamo termine a termine. Poiché la serie di potenze per e^z è dato da $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$, segue dalla formula suddetta e da quella che definisce i momenti dall'origine, che

$$\begin{aligned} (2) M_X(\theta) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\theta}{1!} x_i + \frac{\theta^2}{2!} x_i^2 + \frac{\theta^3}{3!} x_i^3 + \dots \right) f(x_i) = \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)}_1 + \underbrace{\frac{\theta}{1!} \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)}_{\mu_1'} + \underbrace{\frac{\theta^2}{2!} \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 f(x_i)}_{\mu_2'} + \dots = 1 + \frac{\theta}{1!} \mu_1' + \frac{\theta^2}{2!} \mu_2' + \frac{\theta^3}{3!} \mu_3' + \dots + \frac{\theta^k}{k!} \mu_k' \end{aligned}$$

In questo sviluppo si può osservare che il coefficiente $\frac{\theta^k}{k!}$ è il momento d'ordine k dall'origine, di conseguenza se si può determinare la funzione generatrice dei momenti di una variabile X , e si può sviluppare in serie di potenze di θ i momenti della variabile si possono ottenere semplicemente esaminando lo sviluppo risultante.



Ora se si desidera un momento specifico può essere più conveniente calcolarlo calcolando la derivata fatta rispetto a ϑ di $M_X(\vartheta)$ calcolata per $\vartheta = 0$, infatti derivando ripetutamente la (2) si ha

$$\text{che } \mu'_k = \left. \frac{d^k M_X \vartheta}{d \vartheta^k} \right|_{\vartheta=0} \quad k=1,2,3,\dots$$

Infatti per $k=1$, si ha che $M'_X(\vartheta) = \mu'_1 + \mu'_2 \vartheta + \frac{1}{2} \mu'_3 \vartheta^2 + \dots$ e quindi $M'_X(\vartheta) \Big|_{\vartheta=0} = \mu'_1$.

Per $k=2$ $M''_X(\vartheta) = \mu'_2 + \mu'_3 \vartheta + \dots$ quindi $M''_X(\vartheta) \Big|_{\vartheta=0} = \mu'_2$

Distribuzione binomiale

Consideriamo un esperimento di tipo ripetitivo in cui si registra soltanto il verificarsi o il non verificarsi di un evento. Supponiamo che sia p la probabilità che l'evento si verifichi quando l'esperimento viene eseguito e indichiamo con $q=1-p$ la probabilità che esso non si verifichi. Se l'evento si verifica, in una data esecuzione dell'esperimento, esso si chiamerà un successo, altrimenti un insuccesso. Siano poi fatte n esecuzioni indipendenti dell'esperimento e la variabile X rappresenti il numero di successi che si otterranno nelle n esecuzioni.

Affronteremo ora il problema di determinare la probabilità di ottenere x successi in n esecuzioni dell'esperimento, cioè che $X=x$.

A tale scopo determiniamo dapprima la probabilità di ottenere x successi seguiti da $n-x$ insuccessi.

Questi n eventi sono indipendenti, perciò ricordando una formula già vista e valida per eventi indipendenti e cioè che $P\{A_1 \cap A_2\} = P\{A_1\}P\{A_2\}$ questa probabilità è data da:

$\frac{x \text{ volte}}{p * p * \dots * p} \frac{n-x \text{ volte}}{q * q * \dots * q} = p^x q^{n-x}$, la probabilità di ottenere x successi ed $n-x$ insuccessi, se questi eventi si verificano in qualche altro ordine, non cambia, perché basta semplicemente riordinare le p e le q in modo da corrispondere al nuovo ordine.

Per risolvere il problema è perciò necessario contare il numero di ordini possibili, il numero di ordini è rappresentato dalle permutazioni possibili di n oggetti, di cui x sono uguali tra loro, cioè le p , ed $n-x$ sono anch'esse uguali tra loro, cioè le q , ma com'è noto il numero di tali permutazioni è dato da

$$(1) \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Ora ricordando la formula $P\{A_1 \cup A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\}$ la probabilità che si verifichi l'uno o l'altro di un insieme di eventi reciprocamente esclusivi è data dalla somma delle loro probabilità.

Di conseguenza è necessario sommare $p^x * q^{n-x}$ tante volte quanti sono gli ordini possibili, poiché la (1) dà il numero di tali ordini, la probabilità di ottenere x successi in qualche ordine si ottiene moltiplicando $p^x * q^{n-x}$ per la quantità espressa dalla (1).

La probabilità risultante che è quella di ottenere x successi in n esecuzioni indipendenti di un esperimento, per cui p è la probabilità di successo in una singola esecuzione, definisce quella che è nota come la distribuzione binomiale e cioè

$$(2) f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

Il termine binomiale deriva dalla relazione della funzione di densità binomiale con il seguente

sviluppo binomiale: $(q + p)^n = q^n + \frac{n}{1!} q^{n-1} p + \frac{n(n-1)}{2!} q^{n-2} p^2 + \dots + p^n$



Il termine generale in questo sviluppo che contiene p^x dove x è un intero, è dato da

$$\frac{n(n-1) \dots * n-x+1}{x!} q^{n-x} p^x = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

e rappresenta precisamente il valore della funzione di densità binomiale.

Come risultato si può scrivere che $(q + p)^n = \sum_{x=0}^n \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}.$

Così i vari termini nello sviluppo binomiale di $(q + p)^n$ danno le probabilità dei vari possibili risultati nel loro ordine naturale.

