

Regola di addizione della probabilità

Il calcolo delle probabilità si occupa spesso di eventi in relazione tra loro piuttosto che di un evento soltanto. Per semplicità consideriamo due eventi di questo tipo A_1, A_2 associati ad un esperimento.

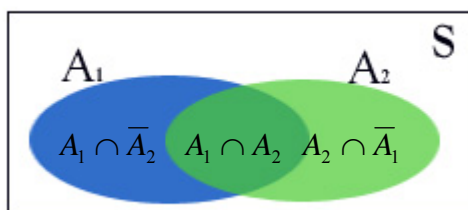
Spesso è conveniente sapere se entrambi gli eventi si verificheranno quando l'esperimento viene eseguito oppure se si verificherà almeno uno di essi. Per quanto è già stato detto il primo di questi 2 eventi composti è $A_1 \cap A_2$ ed il secondo è l'evento $A_1 \cup A_2$.

Per dare una risposta riguardante la frequenza con cui si verificheranno questi eventi composti è necessario conoscere i valori della loro probabilità e precisamente $P\{A_1 \cap A_2\}$ e $P\{A_1 \cup A_2\}$.

Regola dell'addizione delle probabilità.

Ricaviamo la formula per il calcolo allora la probabilità di $P\{A_1 \cup A_2\}$. Lo spazio campionario di un esperimento sia rappresentato dai punti nel rettangolo dalla figura seguente:

fig 1)



I punti campione corrispondenti al verificarsi degli eventi A_1 e A_2 siano rispettivamente i punti interni delle regioni indicate con A_1 e A_2 . Allora come è già stato detto l'evento $P\{A_1 \cup A_2\}$ consiste di tutti i punti che giacciono all'interno di queste due regioni. La determinazione di una formula per il calcolo di $P\{A_1 \cup A_2\}$ si basa sull'esprimere $A_1 \cup A_2$ come l'unione di eventi disgiunti per applicare poi il III° assioma delle probabilità.

Dalla figura 1 si può osservare che $A_1 \cup A_2$ è l'unione sei seguenti insiemi disgiunti

$A_1 \cap \bar{A}_2, A_2 \cap \bar{A}_1$ e $A_1 \cap A_2$.

(1) Per il terzo assioma si ha che $P\{A_1 \cup A_2\} = P\{A_1 \cap \bar{A}_2\} + P\{A_2 \cap \bar{A}_1\} + P\{A_1 \cap A_2\}$

Ma dalla figura 1 si può anche osservare che

$A_1 = \{A_1 \cap \bar{A}_2\} \cup \{A_1 \cap A_2\}$, quindi per il terzo assioma $P\{A_1\} = P\{A_1 \cap \bar{A}_2\} + P\{A_1 \cap A_2\}$

allo stesso modo $P\{A_2\} = P\{A_2 \cap \bar{A}_1\} + P\{A_1 \cap A_2\}$

Ora ricavando da queste 2 ultime relazioni rispettivamente $P\{A_1 \cap \bar{A}_2\}$ e $P\{A_2 \cap \bar{A}_1\}$ e sostituendo le loro espressioni al secondo membro della (1) si ottiene la formula richiesta, nota come **regola di addizione delle probabilità**, o regola delle probabilità totali data dalla

(2) $P\{A_1 \cup A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} - P\{A_1 \cap A_2\}$

Se gli eventi A_1 e A_2 non hanno punti in comune, come già detto, allora gli eventi si chiamano *disgiunti*, la formula (2) in questo caso si riduce alla

(3) $P\{A_1 \cup A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\}$

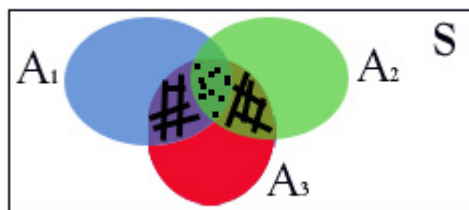
Questa naturalmente è una diretta conseguenza del terzo assioma.

Questa regola (2) si generalizza al caso di più eventi, ad es. nel caso di 3 eventi arbitrari si ha che

$P\{A_1 \cup A_2 \cup A_3\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + P\{A_3\} - P\{A_1 \cap A_2\} - P\{A_1 \cap A_3\} - P\{A_2 \cap A_3\} + P\{A_1 \cap A_2 \cap A_3\}$



Fig 2)



La regola di addizione è applicabile a qualunque tipo di spazio campione per cui è assegnata una misura P della probabilità, per usarla occorre naturalmente conoscere i valori delle probabilità al secondo membro della formula, cosa particolarmente semplice quando lo spazio campione è costituito soltanto da un *numero finito* di punti, perciò per ora limiteremo la discussione a spazi campione contenenti soltanto un numero finito di punti.

Quindi la prima cosa da fare per calcolare la probabilità di un evento A per uno spazio campione finito è di *assegnare il valore della probabilità a ciascuno dei punti campione*, che naturalmente deve obbedire ai primi 2 assiomi della probabilità, cioè questi valori devono essere **numeri non negativi la cui somma è uguale a 1**.

Queste assegnazioni si possono fare basandosi sull'esperienza dei singoli, su informazioni esterne, su considerazioni di simmetria, ecc., così ad esempio sarebbe realistico assegnare la probabilità di $\frac{1}{36}$ a ciascun punto dello spazio campione considerato per l'esperimento del getto di 2 dadi.

Calcolo della probabilità di un evento

Indichiamo con n il numero totale di punti campione e siano p_1, p_2, \dots, p_n le probabilità assegnate ai rispettivi punti campione, ciascun punto rappresenta un possibile risultato che a sua volta è un evento.

Eventi di questo tipo sono spesso chiamati *eventi semplici*, questi eventi sono indicati con e_1, e_2, \dots, e_n , è chiaro che questi eventi sono disgiunti, ora qualsiasi evento A è un insieme di punti campione e perciò è l'unione degli eventi semplici corrispondenti.

L'applicazione del terzo assioma della probabilità perciò fornisce:

$$(4) \quad P\{A\} = \sum_A P\{e_i\} = \sum_A p_i$$

La probabilità di A è uguale alla somma su A delle probabilità di e_i che è uguale alla somma su A delle p_i , dove la sommatoria viene fatta su quelle probabilità p_i dei punti campione che giacciono in A .

Per molti giochi d'azzardo lo spazio campione è non soltanto finito, ma a ciascuno dei punti campione viene assegnata la stessa probabilità, questo è vero per es. per il getto di due dadi per cui lo spazio campione presentato risulta conveniente. A ciascuno di quei punti campione viene assegnata infatti la probabilità di $\frac{1}{36}$.

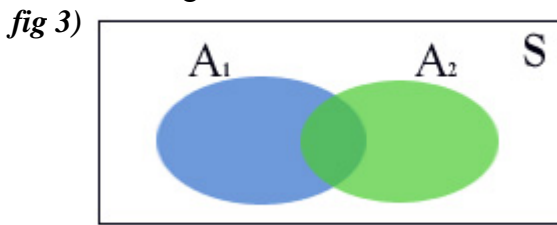
Se n implica il numero totale di punti campione e $N(A)$ il numero di punti campione che giacciono in A , allora poiché si è assunto che $p_i = \frac{1}{n}$ per tutti gli $i = 1, 2, \dots, n$ allora si ha che la (4) si riduce a

$$(5) \quad P\{A\} = \frac{N(A)}{n}$$



Probabilità condizionata

Supponiamo di voler sapere se un evento A_2 si verificherà sotto la condizione che un evento A_1 sia certo di verificarsi. Per discutere le probabilità associate ad eventi come questi assumiamo che lo spazio campione sia costituito soltanto da un numero finito di punti e consideriamo la situazione mostrata in figura 3



Poiché A_1 è certo di verificarsi soltanto quando lo spazio campione è ristretto a quei punti che giacciono dentro la regione A_1 , è necessario considerare come si dovrebbero assegnare le probabilità ai punti di questo nuovo spazio campione più piccolo.

Se originariamente ad un punto campione in A_1 fosse stata assegnata ad esempio una probabilità doppia rispetto ad un altro punto in A_1 , allora si dovrebbe assegnare una probabilità doppia anche nel nuovo spazio campione, perché ignorare i risultati sperimentali che non producono l'evento A_1 non deve alterare il rapporto delle frequenze attese per quei due punti campione.

È semplicemente necessario perciò *moltiplicare le probabilità originarie assegnate ai punti in A_1 per un fattore costante c tale che la somma delle nuove probabilità sia uguale a 1*. Così se π_i indica la nuova probabilità corrispondente a p_i nell'assegnazione originaria si dovrebbe scegliere $\pi_i = cp_i$ in modo tale che la somma delle p_i fatta sui punti di A_1

$$\sum_{A_1} \pi_i = c \sum_{A_1} p_i = cP\{A_1\} = 1 \quad \text{da cui si ottiene che } c = \frac{1}{P\{A_1\}} \text{ e quindi } \pi_i = \frac{p_i}{P\{A_1\}}$$

Ora che le probabilità del nuovo spazio campione sono state assegnate si possono calcolare le probabilità nella solita maniera semplicemente applicando la formula (4).

Tutte queste probabilità saranno probabilità condizionate subordinate cioè al verificarsi dell'evento A_1 .

Se la probabilità che l'evento A_2 si verifichi, subordinata alla condizione del verificarsi dell'evento

$$A_1, \text{ si indica con } P\{A_2 | A_1\} = \frac{\sum_{A_1 \cap A_2} \pi_i}{P\{A_1\}} \quad (\text{la barra indica "a condizione che"}).$$

La prima somma viene fatta su quelle probabilità π_i corrispondenti ai punti campione che giacciono in $A_1 \cap A_2$ poiché questi sono i soli punti campione dentro A_1 che corrispondono al verificarsi di A_2 .

Poiché la somma al numeratore al secondo membro rappresenta $P\{A_1 \cap A_2\}$ segue che la formula per il calcolo della probabilità condizionata si riduce alla

$$(6) \quad P\{A_2 | A_1\} = \frac{P\{A_1 \cap A_2\}}{P\{A_1\}} \quad \text{si assume qui che } A_1 \text{ sia un evento per cui } P\{A_1\} > 0$$

