

Come esempio consideriamo il problema seguente: Un fabbricante di parti di macchina sostiene che il 10% al massimo delle sue parti sono difettose. Un compratore ha bisogno di 120 di queste parti e per essere sicuro di acquistarle senza difetti egli ne ordina 140. Se l'affermazione del fabbricante è valida, si vuole calcolare la probabilità che il compratore riceva almeno 120 parti buone.

Indichiamo con la variabile X il numero delle parti buone ricevute. Allora X si può trattare come una variabile binomiale con $n = 140$ e $p = 0.9$

In questo caso questi valori giustificano certamente una approssimazione mediante la funzione di densità normale in quanto $p = 0.9 > \frac{1}{2}$ e $nq = n(1 - p) = 140 * 0.1 = 14 > 5$

Il problema è quindi quello di calcolare la $P\{X \geq 120\}$.

In questo caso la media e lo scarto quadratico medio sono dati da $\mu = np = 140 * 0.9 = 126$ e

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{140 * 0.9 * 0.1} = 3.55$, quindi si ha che la

$$P(X \geq 120) = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{120 - \mu}{\sigma}\right\} = P\left\{\frac{X - 126}{3.55} \geq \frac{120 - 126}{3.55}\right\} = P\{Z \geq -1.69\}$$

Poiché $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 126}{3.55}$ si può trattare come una variabile normale standard approssimata,

questa probabilità che si può trovare nelle apposite tavole è uguale a 0.95. Perciò se l'affermazione del fabbricante è valida il compratore ha il 95% di probabilità di ottenere almeno 120 parti buone.

Distribuzione Gamma

Una distribuzione di probabilità che si presenta spesso in vari problemi statistici, come ad esempio nello studio della durata di una apparecchiatura industriale, è la distribuzione gamma.

Il nome deriva dalla relazione della distribuzione con la funzione *gamma del calcolo*, essa comprende due parametri: $\alpha > 0, \beta > 0$ ed è definita nel modo seguente:

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} * e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

La quantità $\Gamma(\alpha)$ rappresenta il valore della funzione Γ nel punto α , questa funzione è definita come segue:

$$(2) \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Si dimostra facilmente, integrando per parti, che $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$, se α è un intero positivo questa relazione di ricorrenza fornisce il risultato che $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!$

Come conseguenza di questa proprietà la funzione Γ viene chiamata a volte funzione fattoriale.

Momenti

I momenti della distribuzione gamma si ricavano facilmente servendosi della (1), dalla definizione si ha infatti che:

$$\mu'_k = E[X^k] = \frac{1}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{k+\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \quad \text{ponendo } t = \frac{x}{\beta} \text{ si ha che } dx = \beta dt \text{ e quindi}$$



$$\mu'_k = \frac{\beta^{k+\alpha-1} * \beta}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} * \int_0^{+\infty} t^{k+\alpha-1} e^{-t} dt \quad \text{semplificato} \quad \frac{\beta^k}{\Gamma(\alpha)} * \int_0^{+\infty} t^{k+\alpha-1} e^{-t} dt$$

\downarrow
 $\Gamma(k+\alpha)$

Dalla (2) si può osservare che l'integrale al secondo membro è $\Gamma(k + \alpha)$, e quindi si può scrivere:

$$\mu'_k = \beta^k \frac{\Gamma(k + \alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

Ora, tenuto conto che k è un intero positivo, l'applicazione ripetuta della relazione ricorrenza

$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ fornisce che :

$\Gamma(k + \alpha) = (k\alpha - 1)(k + \alpha - 2) \dots \alpha \Gamma(\alpha)$ e quindi si può scrivere:

$$\mu'_k = \beta^k (k + \alpha - 1)(k + \alpha - 2) \dots \alpha$$

Quindi per $k=1$ la media è data dalla

$$(3) \quad \mu = \beta \alpha$$

Tenuto conto che $\mu'_2 = \beta^2 (1 + \alpha) \alpha$ usando una formula nota, cioè che $\sigma^2 = \mu'_2 - \mu^2$, la varianza è data da:

$$(4) \quad \sigma^2 = \mu'_2 - \mu^2 = \beta^2 (1 + \alpha) \alpha - \beta^2 \alpha^2 = \beta^2 \alpha$$

La distribuzione esponenziale

Il caso particolare della distribuzione gamma che si verifica quando $\alpha = 1$ viene chiamato distribuzione esponenziale, essa viene usata sufficientemente spesso da valer la pena di trattarla separatamente.

Questa distribuzione è rappresentata quindi dalla

$$(5) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{\beta} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

tenuto conto che $\Gamma(1) = 1$ infatti $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 0 + 1 = 1$

Dalle formule della media e della varianza di una distribuzione gamma si ricava per $\alpha = 1$ che la media e la varianza di una distribuzione esponenziale sono date da $\mu = \beta$, $\sigma^2 = \beta^2$

La distribuzione esponenziale si è trovata ad esempio che è un modello adatto per calcolare la probabilità che un'apparecchiatura duri t unità di tempo prima che essa si guasti, l'appropriatezza del modello dipende dalla natura dell'apparecchiatura e da ciò che ne causa il decadimento.

Se il guasto è dovuto principalmente a cause esterne anziché al logorio interno, allora il modello è verosimile che sia realistico.

In queste circostanze il tempo che passa fino al guasto successivo, dopo che l'apparecchiatura è stata riparata e rimessa in funzionamento, seguirà anch'esso una distribuzione esponenziale.

Così, dopo ciascuna riparazione, l'apparecchiatura si comporta come se essa fosse nuova.



Esercitazione

Come impiego pratico della distribuzione esponenziale consideriamo il problema seguente: un costruttore di un'apparecchiatura elettronica ha trovato per esperienza che la sua apparecchiatura dura in media due anni senza riparazioni e che il tempo che passa prima che si verifichi il primo guasto segue una distribuzione esponenziale.

Se egli garantisce che la sua apparecchiatura duri un anno, qual è la probabilità che l'apparecchiatura abbia un guasto prima che scada la garanzia? ovvero quale percentuale dei suoi clienti sarà interessata a qualche riparazione per un guasto che si verifica prima di un anno?

Poiché β è la media della distribuzione data dalla (5) e in questo caso $\beta = 2$, la funzione di densità

$$\text{da usare in questo caso è } f(x) = \frac{1}{2} * e^{-\frac{x}{2}} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}$$

Il problema è quindi quello di calcolare la probabilità $P\{X < 1\}$ dove X rappresenta il tempo che passa prima che si verifichi il primo guasto, si ha perciò che:

$$P\{X < 1\} = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2} dx \text{ ponendo } t = \frac{x}{2} \text{ si ha che } dx = 2dt$$

sia ha che

$$P\{X < 1\} = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = -e^{-\frac{1}{2}} + 1 = 0.39$$

Così anche se la durata media di vita della apparecchiatura è il doppio della durata garantita, c'è una probabilità abbastanza elevata, pari al 39%, che l'apparecchiatura abbia un guasto prima che scada la garanzia.

Distribuzione chi-quadrato (X^2)

Un altro caso particolare della distribuzione gamma che ha molte applicazioni statistiche si ricava dalla (1) prendendo $\beta = 2$ e scrivendo $\alpha = \frac{\nu}{2}$, esso prende il nome di distribuzione chi-quadrato la cui funzione di densità è quindi la seguente:

$$(6) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\nu-1}{x^2} e^{-\frac{x}{2}} & , x > 0 \\ \frac{\nu}{2^2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) & , x \leq 0 \\ 0 & \end{cases}$$

il motivo della sostituzione del parametro α con il parametro $\frac{\nu}{2}$ è che il parametro ν viene

normalmente usato per rappresentare i gradi di libertà e quindi possiede un significato intuitivo naturale quando la distribuzione chi-quadrato si applica a certi specifici problemi statistici.

E' interessante a questo proposito calcolare la media e la varianza di una variabile chi-quadrato in termini di questo nuovo parametro, ponendo $\beta = 2$ e $\alpha = \frac{\nu}{2}$ nelle (3) e (4) si ottiene che $\mu = \nu$ e

$$\sigma^2 = 2\nu$$

