

Problema 5

Consideriamo il getto di due dadi simmetrici. Sia A_1 l'evento che la somma dei punti ottenuti sia uguale a 6, e C l'evento che il primo dado dia 4.

$A_1 \rightarrow \text{somma} = 6$

$C \rightarrow 4 \text{ sul I}^\circ \text{ dado}$

Ci si chiede se questi due eventi siano indipendenti

Allora l'evento $A_1 \cap C$ è rappresentato dall'unico risultato (4,2) $A_1 \cap C \rightarrow (4,2)$ e quindi

$$P\{A_1 \cap C\} = \frac{1}{36} = 0,027 \qquad P\{A_1\} = \sum_{A_1} p_i \quad (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)$$

poiché $P\{A_1\}P\{C\} = \frac{5}{36} * \frac{1}{6} = \frac{5}{216} = 0.023$

poiché $P\{A_1 \cap C\} \neq P\{A_1\}P\{C\}$ i due eventi **non sono indipendenti**, infatti se ad esempio il I° dado mostrasse un 6 l'evento A_1 diventa impossibile.

Ora se invece indichiamo con A_2 l'evento di ottenere una somma dei punti uguale a 7, allora $A_2 \cap C$ è rappresentato dall'unico risultato (4,3) e quindi $A_2 \rightarrow \text{somma} = 7$ $A_2 \cap C \rightarrow (4,3)$

$$P\{A_2 \cap C\} = \frac{1}{36}$$

$$P\{A_2\}P\{C\} = \frac{6}{36} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

poiché ora $P\{A_2 \cap C\} = P\{A_2\}P\{C\}$ in questo caso **i due eventi sono indipendenti**

Esercitazione

Risolviamo ora il problema seguente, che oltre ad essere una applicazione delle formule fin qui esaminate, ci introduce inoltre al calcolo delle probabilità delle cause del verificarsi di un evento. Una scatola contiene due palline rosse e una seconda scatola identica contiene una pallina rossa e una bianca. Se si sceglie una scatola a caso e si estrae da essa una pallina, si vuole calcolare la probabilità di avere scelto la prima scatola se la pallina estratta risulta essere rossa.

Indichiamo con A_1 l'evento di scegliere la prima scatola e con \bar{A}_1 (complemento di A_1) quello di aver scelto la seconda scatola, indichiamo poi con A_2 l'evento di estrarre una pallina rossa e con \bar{A}_2 (complemento di A_2) quello di estrarre una pallina bianca

$A_1 \rightarrow$ scelta I° scatola	$A_2 \rightarrow$ estrazione pallina rossa
$\bar{A}_1 \rightarrow$ scelta II° scatola	$\bar{A}_2 \rightarrow$ estrazione pallina bianca

Si tratta quindi di calcolare $P\{A_1 | A_2\}$ si può quindi scrivere $P\{A_1 | A_2\} = \frac{P\{A_1 \cap A_2\}}{P\{A_2\}}$

La probabilità del numeratore al secondo membro si può calcolare usando [la regola di moltiplicazione delle probabilità](#) espressa dalla formula (1) vista l'ultima volta.

Intendendo che scegliere una scatola a caso significa che la probabilità di scegliere ad esempio al prima scatola è uguale a $\frac{1}{2}$. Si ha quindi che $P\{A_1 \cap A_2\} = P\{A_1\}P\{A_2 | A_1\} = \frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{2}$

Per calcolare la probabilità al denominatore si può osservare che l'evento A_2 si verificherà se si verificherà l'uno o l'altro dei due eventi reciprocamente esclusivi: $A_1 \cap A_2$ e $\bar{A}_1 \cap A_2$

Si può quindi scrivere per quanto è già stato detto che $P\{A_2\} = P\{A_1 \cap A_2\} + P\{\bar{A}_1 \cap A_2\}$, ma



$$P\{\bar{A}_1 \cap A_2\} = P\{\bar{A}_1\}P\{A_2 | \bar{A}_1\} = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

per cui $P\{A_2\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ cosicché in fine $P\{A_1 | A_2\} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$

Questo esempio è stato presentato come applicazione pratica delle formule fondamentali per il calcolo delle probabilità, tuttavia esso si sarebbe potuto risolvere più semplicemente facendo ricorso allo *spazio campione dell'esperimento*. E ricordando una formula già vista e cioè che $P\{A\} = \sum_A P_i$

Per questo problema lo spazio campione è costituito dai seguenti 4 punti : **I1, I2, I11, I12** dove il numero romano rappresenta il numero della scatola e l'altro il numero della pallina. A ciascuno di questi 4 punti si deve ovviamente assegnare lo stesso valore della probabilità, e precisamente $\frac{1}{4}$.

L'evento dell'estrazione di una pallina rossa A_2 restringe lo spazio campione soltanto ai primi 3 punti (I1, I2, I11) nell'ipotesi che la pallina 2 nella seconda scatola sia una pallina bianca.

A ciascuno di questi 3 punti occorre assegnare la stessa probabilità pari ad $\frac{1}{3}$.

Ora soltanto i primi due punti campione (I1, I2) corrispondono al verificarsi dell'evento A_1 cioè la scelta della prima scatola, quindi per la formula suddetta $P\{A\} = \sum_A P_i$ si ha che

$$P\{A_1 | A_2\} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Formula di Bayes

L'esempio considerato è tipico di problemi in cui si considera il risultato di un esperimento e poi ci si chiede qual è la probabilità che esso sia dovuto ad una fra le possibili cause del suo verificarsi. Così nell'esempio considerato sono due le possibili cause dell'estrazione di una pallina rossa e si vuole calcolare la probabilità che essa sia dovuta soltanto alla prima causa cioè alla scelta della prima scatola. Per quanto la soluzione del problema sia stata ottenuta semplicemente applicando le regole della probabilità nella successione appropriata, tuttavia i calcoli sono sufficientemente estesi da valer la pena di ricavare una formula per trattare questi problemi in modo sistematico.

A tale scopo H_1, H_2, \dots, H_n siano eventi reciprocamente esclusivi con $P\{H_i\} = p_i$ con $p_i > 0$

$i = 1, 2, \dots, n$ e tali che $\bigcup_{i=1}^n H_i = S$ dove S rappresenta lo spazio campione.

Si dice anche che gli eventi H_1, H_2, \dots, H_n costituiscono una partizione dello spazio campione

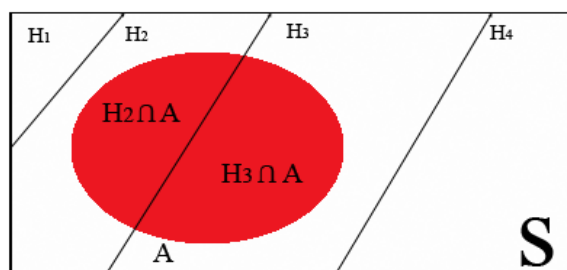
Essi rappresentano le n possibili cause di un risultato sperimentale,

Sia poi A un evento con $P\{A\} > 0$ che si verifica quando l'esperimento viene eseguito e

consideriamo il problema di calcolare la probabilità che H_i sia la causa del verificarsi dell'evento A

Una suddivisione dello spazio campione e la sua relazione con l'evento A è mostrato nella figura seguente dove lo spazio campione è suddiviso per comodità in 4 sottoinsiemi.

fig 1)



Si tratta quindi di calcolare la probabilità condizionata $P\{H_i | A\}$, per la formula della probabilità condizionata questa è data dalla

$$(1) P\{H_i | A\} = \frac{P\{H_i \cap A\}}{P\{A\}}$$

la regola di moltiplicazione fornisce la

$$(2) P\{H_i \cap A\} = P\{H_i\}P\{A | H_i\}$$

Sostituendo ora la (2) nella (1) si ottiene

$$(3) P\{H_i | A\} = \frac{P\{H_i\}P\{A | H_i\}}{P\{A\}}$$

Dalla figura 1 è chiaro che l'evento A è l'unione degli eventi disgiunti $H_1 \cap A, H_2 \cap A, \dots, H_n \cap A$ e che alcuni degli insiemi corrispondenti a questi eventi possono naturalmente essere vuoti come accade anche in figura.

Per il terzo assioma della probabilità si può quindi scrivere che: $P\{A\} = \sum_{j=1}^n P\{H_j \cap A\}$

Sostituendo la (2) al secondo membro di quest'ultima si ottiene:

$$(4) P\{A\} = \sum_{j=1}^n P\{H_j\}P\{A | H_j\}$$

Questa formula stabilisce che $P\{A\}$ è uguale ad una media pesata di $P\{A | H_j\}$, ogni termine essendo pesato dalla probabilità dell'evento rispetto al quale l'evento A è condizionato.

Sostituendo della (4) nella (3) si ottiene la formula richiesta per calcolare la probabilità delle cause nota come **formula di Bayes** ed espressa dalla

$$(5) P\{H_i | A\} = \frac{P\{H_i\}P\{A | H_i\}}{\sum_{j=1}^n P\{H_j\}P\{A | H_j\}}, \text{ per } i = 1, 2, \dots, n$$

