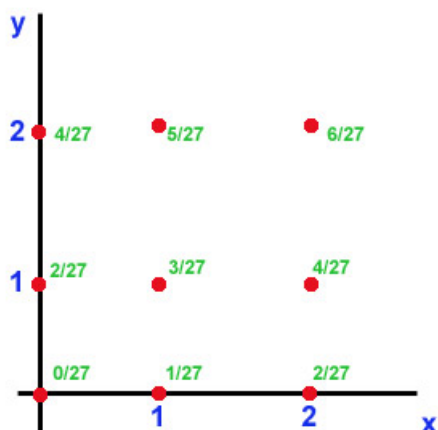


### Esempio

Si consideri la funzione di densità di due variabili casuali discrete  $X, Y$  data da  $f(x, y) = \frac{1}{27}(x + 2y)$  dove  $x, y$  possono assumere tutti i valori interi tali che  $0 \leq x \leq 2$  e  $0 \leq y \leq 2$  e  $f(x, y) = 0$  altrove, e si desideri calcolare la probabilità  $P\{X \geq 1, Y \leq 1\}$ .

Lo spazio campionario con le probabilità calcolate tramite la formula suddetta è mostrato nella figura seguente

Fig. 2)



La probabilità richiesta è quindi data da

$$P\{X \geq 1, Y \leq 1\} = \sum_{x \geq 1} \sum_{y \leq 1} f(x, y) = \sum_{x=1}^2 \sum_{y=0}^1 f(x, y) =$$

$$= \sum_{x=1}^2 [f(x, 0) + f(x, 1)] = f(1, 0) + f(1, 1) + f(2, 0) + f(2, 1) = \frac{1}{27} + \frac{3}{27} + \frac{2}{27} + \frac{4}{27} = \frac{10}{27} = 0.37 = 37\%$$

### Variabili indipendenti

2 variabili che sono senza rapporti in senso probabilistico sono chiamate variabili indipendenti

Poiché l'indipendenza di due eventi  $A_1, A_2$  è stata definita da  $P\{A_1 \cap A_2\} = P\{A_1\}P\{A_2\}$

una definizione corrispondente per le variabili casuali discrete dovrebbe essere conforme a quella definizione.

Considerando eventi quali  $X \in A$  e  $Y \in B$ , dove  $A$  e  $B$  sono insiemi qualsiasi nei domini delle variabili  $X$  e  $Y$  rispettivamente, la definizione di indipendenza per eventi richiederebbe che

$$(I) P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\}P\{Y \in B\} \quad \forall A, B$$

Questa viene presa spesso come definizione di indipendenza per due variabili casuali.

Tuttavia poiché ora si sta ponendo l'accento sulle funzioni di densità cercheremo di dare una definizione equivalente basata sulle funzioni di densità. A tale scopo sia  $f(x, y)$  la funzione di densità congiunta delle variabili  $X, Y$  e  $g(x), h(y)$  le loro densità individuali.

Allora scegliendo che gli insiemi  $A$  e  $B$  siano costituiti rispettivamente dai singoli punti  $x$  e  $y$

$$A = x, B = y \text{ la (I) si riduce allora alla: } P\{X = x, Y = y\} = P\{X = x\}P\{Y = y\} \quad \forall x, y$$

Ma in termini di funzioni di densità questa si scrive:  $f(x, y) = g(x) * h(y) \quad \forall x, y$

Viceversa se  $f(x, y) = g(x) * h(y), \forall x, y$  allora lavorando nello spazio campionario delle due variabili casuali segue per analogia con la formula (2) vista l'ultima volta, cioè  $P\{X \in R\} = \sum_{x \in R} f(x)$ , che

$$P\{X \in A, Y \in B\} = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} f(x, y) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} g(x)h(y) = \sum_{x \in A} g(x) \sum_{y \in B} h(y) = P\{X \in A\}P\{Y \in B\}$$

Questa mostra che la (I) vale per tutti gli  $A$  e  $B$  se e soltanto se  $f(x, y) = g(x) * h(y), \forall x, y$



Poiché l'ultima relazione è espressa in termini di funzioni di densità ed è più utile della (1), essa viene usata per definire l'indipendenza, si può dare allora la seguente **Definizione**:

**Le variabili casuali  $X$  e  $Y$ , la cui funzione di densità congiunta è  $f(x, y)$  e le cui funzioni di densità individuali sono  $g(x)$  e  $h(y)$ , sono indipendenti se e soltanto se**

$$(2) f(x, y) = g(x) * h(y), \forall x, y$$

La precedente definizione si può generalizzare in ovvia maniera al caso di  $n$  variabili casuali per definirne l'indipendenza. **Definizione**:

**Le variabili casuali  $X_1, \dots, X_n$  la cui funzione di densità congiunta è  $f(x_1, \dots, x_n)$  e le cui funzioni di densità singole sono  $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$  sono indipendenti se e soltanto se**

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) * \dots * f_n(x_n) \quad \forall x_1, \dots, x_n$$

### Distribuzioni marginali e distribuzioni condizionate

Poiché è importante sapere se un insieme di variabili è costituito da variabili indipendenti, sarebbe desiderabile disporre di un metodo sistematico per ricavare le funzioni di densità delle singole variabili dalla loro funzione di densità congiunta.

Un tale metodo si ottiene senza difficoltà per il caso di due variabili servendosi della regola di moltiplicazione delle probabilità. Sebbene il metodo si possa facilmente estendere a più di due variabili, limiteremo per ora la discussione a due sole variabili casuali discrete.

A tale scopo consideriamo un esperimento in cui  $A_1$  rappresenta l'evento che una variabile casuale  $X$  assuma il valore  $x$  ( $A_1 \rightarrow X = x$ ) e  $A_2$  l'evento che una seconda variabile casuale  $Y$  assuma il valore  $y$  ( $A_2 \rightarrow Y = y$ ).

La regola di moltiplicazione espressa dalla (1)  $P\{A_1 \cap A_2\} = P\{A_1\}P\{A_2 | A_1\}$  assume allora la forma che deriva dall'esprimere le probabilità degli eventi in termini di funzioni di densità. Poiché ora  $P\{A_1 \cap A_2\}$  dà la probabilità che le due variabili casuali assumano rispettivamente i valori  $x, y$  essa rappresenta il valore della funzione di densità congiunta nel punto  $(x, y)$  cioè la  $f(x, y)$ .

In modo simile  $P\{A_1\}$  è la probabilità che la variabile  $X$  abbia il valore  $x$  e perciò essa è la  $f\{x\}$ .

Poiché  $P\{A_2 | A_1\}$  è la probabilità che la variabile  $Y$  assuma il valore  $y$ , dato che la variabile  $X$  ha il valore  $x$ , essa si può trattare come il valore di una funzione di densità condizionata che si indica con  $f\{y | x\}$ , allora la (1) diventa

$$(2) f(x, y) = f(x) * f(y | x)$$

Poiché  $f(y | x)$  dà la probabilità condizionata che  $Y$  assuma il valore  $y$  quando  $X$  ha il fissato valore  $x$ , la somma di  $f(y | x)$  su tutti i possibili valori della variabile  $Y$  deve essere uguale a 1. Quindi se entrambi i membri della (2) si sommano su tutti i possibili valori di  $Y$ , si ottiene

$$\sum_y f(x, y) = \sum_y f(x) f(y | x) = f(x) \sum_y f(y | x) = f(x) \quad \text{per cui si ottiene che}$$

$$(3) f(x) = \sum_y f(x, y)$$

La funzione  $f(x)$  viene chiamata la funzione di densità marginale della variabile  $X$ , comunque essa è semplicemente la funzione di densità di  $X$ .

In modo analogo la funzione di densità marginale di  $Y$ , cioè  $g(y)$ , si ottiene sommando la  $f(x, y)$  su tutti i possibili valori di  $X$  per un fissato valore  $y$ , si ha così che

$$(3') g(y) = \sum_x f(x, y)$$

Questi risultati mostrano che se si ha la funzione di densità congiunta di due variabili casuali discrete e si desidera la funzione di densità di una di esse, è semplicemente necessario sommare la funzione di densità congiunta su tutti i valori dell'altra variabile.



La funzione di densità condizionata  $f(y | x)$  dà la distribuzione di probabilità della variabile  $Y$  quando viene mantenuto fisso il valore della variabile  $X$ .

Per la (2) se  $f(x) > 0$  si può scrivere

$$(4) f(y | x) = \frac{f(x, y)}{f(x)}$$

La distribuzione condizionata della variabile  $X$ , per un fissato valore della variabile  $Y$ , è data da una formula analoga, ovvero

$$(4') f(x | y) = \frac{f(x, y)}{g(y)} \quad \text{con } g(y) > 0$$

Ciò mostra che se si conosce la funzione di densità congiunta di due variabili e si desidera la funzione di densità condizionata di una di esse, quando il valore dell'altra variabile viene mantenuto fisso, è semplicemente necessario dividere la funzione di densità congiunta per la funzione di densità della variabile il cui valore viene mantenuto fisso.

