

Nel procedimento per arrivare alla (6) si è assunto che lo spazio campione contenga soltanto un numero finito di punti, ma questa formula si prenderà come definizione di probabilità condizionata anche per spazi campione più generali.

Si dimostra facilmente infatti che  $P\{A_2 | A_1\}$  soddisfa i tre assiomi della probabilità, perciò è legittimo definire la probabilità condizionata in questo modo a prescindere dal tipo di spazio campione.

La formula (6) scritta sotto forma di prodotto fornisce la **regola fondamentale di moltiplicazione delle probabilità** o **regola delle probabilità composte** e cioè

$$(1) P\{A_1 \cap A_2\} = P\{A_1\}P\{A_2 | A_1\}$$

Se si scambia l'ordine dei due eventi la formula (1) diventa:

$$(2) P\{A_1 \cap A_2\} = P\{A_2\}P\{A_1 | A_2\}$$

### Eventi indipendenti

Ora supponiamo che  $A_1, A_2$  siano due eventi tali che  $P\{A_1 | A_2\} = P\{A_1\}$  e che  $P\{A_1\}P\{A_2\} > 0$ , allora l'evento  $A_2$  si dice indipendente nel senso della probabilità o più brevemente indipendente dall'evento  $A_1$ , ciò deriva dal fatto che la probabilità del verificarsi dell'evento  $A_2$  non viene alterata dalla condizione che debba verificarsi l'evento  $A_1$ .

Quando  $A_2$  è indipendente da  $A_1$ , la regola di moltiplicazione delle probabilità espressa dalla (1) diventa:

$$(3) P\{A_1 \cap A_2\} = P\{A_1\}P\{A_2\}$$

viceversa, quando è vera la (3) segue dal confronto di questa con la formula (1) che  $A_2$  è indipendente da  $A_1$ .

Se si uguagliano i secondi membri della (3) e della (2) si può osservare che  $P\{A_1 | A_2\} = P\{A_1\}$ , ma ciò stabilisce che l'evento  $A_1$  è indipendente da  $A_2$ , così se  $A_2$  è indipendente da  $A_1$ , segue che  $A_1$  deve essere indipendente da  $A_2$ .

A causa di questa reciproca indipendenza e poiché la (3) implica questa indipendenza, si è soliti definire l'indipendenza come segue:

### Definizione di indipendenza

**Due eventi**  $A_1, A_2$  si dicono indipendenti se  $P\{A_1 \cap A_2\} = P\{A_1\}P\{A_2\}$

### Esercitazione

Come applicazione pratica delle formule fondamentali per il calcolo delle probabilità di cui ci siamo occupati affrontiamo ora la risoluzione di alcuni problemi.

#### Problema 1

Supponiamo che approssimativamente il 50% degli individui di età superiore ai 40 anni sia in sovrappeso, e che la percentuale degli individui in sovrappeso e aventi una malattia dell'apparato circolatorio sia il 25%. Si vuole calcolare la probabilità che un individuo scelto a caso con più di 40 anni e in sovrappeso (evento  $A_1$ ) abbia una malattia dell'apparato circolatorio (evento  $A_2$ ).

$$\text{Questa probabilità è data da } P\{A_2 | A_1\} = \frac{P\{A_1 \cap A_2\}}{P\{A_1\}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 50\%$$



**Problema 2**

Supponiamo che una famiglia abbia 2 figli e che si voglia calcolare la probabilità che entrambi i figli siano maschi sapendo che almeno uno dei figli è maschio, assumiamo che lo spazio campionario  $S$  sia dato da  $S = \{(m, m), (m, f), (f, m), (f, f)\}$  dove ad esempio  $(m, f)$  sta a indicare che il figlio maggiore è una femmina e il minore è un maschio e che tutti gli elementi dello spazio campione siano ugualmente probabili.

Indichiamo con  $A_1$  l'evento che ambedue i figli siano maschi  $A_1 \rightarrow (m, m)$  e con  $A_2$  l'evento che almeno uno di essi sia maschio  $A_2 \rightarrow (m, f), (f, m), (m, m)$ , si ha allora che

$$P\{A_1 | A_2\} = \frac{P\{A_1 \cap A_2\}}{P\{A_2\}} = \frac{P\{(m, m)\}}{P\{(m, f), (f, m), (m, m)\}} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3} \text{ cioè il } 33\%.$$

**Problema 3**

Supponiamo che uno studente affronti due esami e che la probabilità di superare il primo esame sia uguale a 0.6 e la probabilità di superare il secondo sia uguale a 0.8, inoltre sia uguale a 0.5 la probabilità che egli superi entrambi gli esami.

Si vuole calcolare la probabilità che egli superi almeno un esame e la probabilità che sia bocciato in entrambi. A tale scopo indichiamo con  $A_1$  l'evento corrispondente alla promozione del I° esame e con  $A_2$  quella corrispondente alla promozione al II°. Allora  $A_1 \cap A_2$  è l'evento che egli superi entrambi gli esami e  $A_1 \cup A_2$  quello che ne superi almeno uno.

Si ha quindi che  $P\{A_1 \cup A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} - P\{A_1 \cap A_2\} = 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9$  cioè il 90%.

L'evento che lo studente fallisca in entrambi gli esami è dato da  $\overline{A_1 \cup A_2}$  si ha quindi che

$$P\{\overline{A_1 \cup A_2}\} = 1 - P\{A_1 \cup A_2\} = 1 - 0.9 = 0.1$$

A questo punto si vuole calcolare inoltre la probabilità che lo studente superi il II° esame supposto che abbia superato il I° e analogamente la probabilità di superare il I° supposto di avere già superato il II°, allora la prima di queste due probabilità è data da:

$$P\{A_2 | A_1\} = \frac{P\{A_1 \cap A_2\}}{P\{A_1\}} = \frac{0.5}{0.6} = 0,8\bar{3} = 83.\bar{3}\%$$

La seconda probabilità è data da 
$$P\{A_1 | A_2\} = \frac{P\{A_1 \cap A_2\}}{P\{A_2\}} = \frac{0.5}{0.8} = 0,625 = 62.5\%$$

Il fatto interessante da osservare è che la promozione in uno degli esami può aiutare la prestazione dello studente a superare l'altro in quanto ne aumenta la fiducia

Ci si chiede ora se gli eventi  $A_1$  e  $A_2$  siano o meno indipendenti dal momento che  $P\{A_1 \cap A_2\} = 0.5$  e  $P\{A_1\}P\{A_2\} = 0.6 * 0.8 = 0.48$  e quindi  $P\{A_1 \cap A_2\} \neq P\{A_1\}P\{A_2\}$  non essendo verificata la condizione di indipendenza (3) i due eventi non sono indipendenti. In effetti dal momento che  $P\{A_1 \cap A_2\} > P\{A_1\}P\{A_2\}$  si ricava che, come già detto, la promozione in uno degli esami può aiutare lo studente a superare l'altro.

**Problema 4**

Supponiamo che da un'urna contenente 7 palline nere e 5 bianche si estraggano 2 palline senza sostituzione delle palline estratte, cioè come si dice senza reimbussolamento.

Si vuole calcolare la probabilità che entrambe le palline estratte siano nere nell'ipotesi che le palline nell'urna abbiano tutte la stessa probabilità di essere estratte.

Indichiamo con  $A_1$  l'evento di estrarre una pallina nera nella prima estrazione e con  $A_2$  l'evento che la seconda pallina estratta sia anch'essa nera.



Ora nell'ipotesi che la prima pallina estratta sia nera nell'urna restano 6 palline nere e 5 bianche e quindi si ha che  $P\{A_2 | A_1\} = \frac{6}{11}$ , si ha poi anche che  $P\{A_1\} = \frac{7}{12}$ , in questo caso la regola di moltiplicazione fornisce che  $P\{A_1 \cap A_2\} = P\{A_1\}P\{A_2 | A_1\} = \frac{7}{12} * \frac{6}{11} = \frac{42}{132} = 0.318 = 31.8\%$

